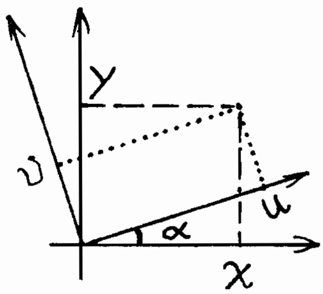
九十九學年(上)土木系三年級「測量平差」期中筆試題

〈2010.11.12.五〉

一、當已知某個隨機變量 x 及其機率密度函數 $f(x)$ 時，試列出 x 期望值和 x 方差(Variance)定義式子。此外，設已知兩個隨機變量 (x, y) 及其聯合機率密度函數 $f(x, y)$，試定義該變量間的相關係數。(25%)

二、誤差傳播定律為：已知 $\mathbf{a}$ 與協方差(Covariance)方陣 $\mathbf{Q_a}$，且 $\mathbf{b}=\mathbf{Ra}$ 時，存在 $\mathbf{Q_b}=\mathbf{RQ_aR^T}$。



參附圖平面直角坐標系間之轉換：$u=\cos\alpha\, x+\sin\alpha\, y$ 與 $\upsilon=-\sin\alpha\, x+\cos\alpha\, y$。假設 α 角度沒有任何誤差，(x, y) 坐標的協方差方陣為 $\begin{pmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$，試明列 (u, υ) 坐標的協方差方陣，並驗證 $\sigma_u^2+\sigma_\upsilon^2=\sigma_x^2+\sigma_y^2$。(25%)

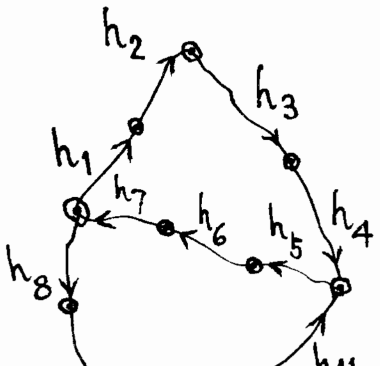
三、間接觀測平差法所用到的誤差方程組常為，

$$\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{l} \quad 及 \quad \sigma_0^2 \mathbf{Q}。$$

(一) 試定義各變數/向量/矩陣(包括維度；提示：舉線性迴歸例子)。 (15%)

(二) 最小二乘平差原理為極小化 $\mathbf{v}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{v}$ 二次形，試推導估計式(Estimator) $\mathbf{x}$ 及其 $\mathbf{Q}_x$。 (10%)

四、如圖所示，水準測量共 11 線段高程差成果為 h_i；各路線約略等長，適用等權處理平差任務。以條件觀測平差法，試列式並敘述如何獲得高程差的殘餘誤差 v_i，於此 $i \in \{1, 2, \ldots, 11\}$。 (25%)



九十九學年(上)土木三「測量平差」期末開書筆試題

〈2011. 1.10〉

一、試推導所謂的單變量加權平均值實為不等權最小二乘(Least-squares)測量平差解答。此外，續以誤差傳播定律導出等權算術平均值之中誤差，或該平均值方差(Variance)的平方根。 20%

二、列式以定義標準差(Standard deviation)與均方根(Root-mean-square)誤差。並敘述在何等情況或條件下，標準差等同於均方根誤差。 20%

三、試參考混合模式平差解答，亦稱估計式(Estimator)，直接簡約出一套完整的間接觀測平差求解公式。 20%

四、從那幾個式子看得出，經過未知參數更新的運算後，逐次最小二乘平差法所估計的參數精度會變的較佳；並闡述其理。20%

五、試證明運算式子無誤：$tr(\mathbf{XY}) = tr(\mathbf{YX})$，此處 $\mathbf{X}$ 矩陣維度為 $i \times j$，$\mathbf{Y}$ 矩陣維度 $j \times i$。必要時，可舉一個數值算例。20%