

測量平差

吳究

太空及遙測研究中心 空間資訊組

工學院 土木工程學系

國立中央大學

燕燕、藍藍

序

一而再、再而三地，從念頭面、需求面的招呼乃至可用教材的供應，促成了本測量平差書出爐。土木系准予開課，若干學生流露出好奇，加上盡量顧及說服力等，這些因素多少影響章節排版和內涵深淺度。

通常，測量平差係指以最小二乘法對有多餘觀測的數據組，進行適應加權處理，除估計參數與精度外，亦評量整體的可靠度。由簡入繁，平差法應用的範圍雖然很廣，卻不離矩陣代數。於剖析間接觀測、條件觀測與混合模式平差之際，理論和代數推導佔絕大部分；數值僅呈現於簡例中。

充其量，本集可供大專院校測量及空間資訊同業後進和前輩參考之用；離教科書尚遠，遑論國際接軌。Gauss 的名言：稀少卻成熟(Few but ripe)；摘為勉勵語。筆者感謝經費贊助者的慷慨，審查者所賜的意見，與家人的愛心。

吳究

中壢 2011 年冬

目錄

一、前言	1
二、矩陣代數	2
2.1 定義	2
2.2 運算規則	3
2.2.1 內積和外積	5
2.2.2 二次形	6
2.3 誤差傳播	7
2.3.1 機率和期望值	7
2.3.2 協方差傳播定律	10
習題	11
三、間接觀測平差	13
3.1 估計式	13
3.2 交會間接平差	14
3.3 平差效能	16
3.3.1 加權平均值	16
3.3.2 參數之相關	18
3.4 可靠度	20
3.5 粗差偵測	25
習題	27
四、條件觀測平差	28
4.1 估計式	28
4.2 幾何約制	29
4.2.1 角條件	30
4.2.2 邊條件	31
習題	32

五、混合模式平差	33
5.1 觀測及參數	33
5.1.1 參數解答	33
5.1.2 方差分量估計	37
5.2 代數與幾何	38
5.2.1 正交投影	39
5.2.2 投影算子	40
5.3 差分組合	41
習題	43
六、雙方程組平差	45
6.1 逐次平差解	45
6.2 最小約制	48
6.2.1 內約制平差	52
6.2.2 網形平差	53
習題	54
參考文獻	55
附錄、知其然與所以然	58
A 坐標之運算	58
A.1 餘弦函數與內積	58
A.2 行列式與面積	59
B 趣味式子	61
C 觀點與演算法	62
D 乘子與固有值	63
D.1 正交方陣	64
D.2 誤差橢圓	66
E 逆陣公式	68
F 習題簡答	69
索引	72

一、前言

測量數據常包含多餘的觀測量，最小二乘平差法幾乎是獨一無二的數據處理利器。既發光發熱亦歷久彌堅為不爭的事實。即使現代的量測設備提供多元的數據，和分析的理論基礎趨於繁複，平差依舊受到推崇。基於殘差二次形為最小之條件，藉法方程組吾人求得自由度大於零時的唯一優化解。

二十世紀中葉以來，電子計算機的發達與進步扮演一個推手的角色。大家對此相當普及的平差科目難免抱持若干困惑，藉此教材能對測量平差，知其然亦知其所以然。

矩陣代數、統計學、三角函數與微積分為必備的素養。有些基本的理工背景會略佔優勢，而得心應手。學習策略上，由簡入繁，循序漸進。公式切忌死記，而應以推理為主軸，靠分配與結合律之用，目睹關係式子自然形成。試問如何熟悉這些應用式，可因人而異或因地制宜。往往接觸夠頻繁，自然熟能生巧。

專業片語均源自前輩學者的智慧，用久了也就成為慣用語，例如轉置、內積、二次形、誤差傳播等。透過量測殘差與協方差矩陣，亦可自動執行粗差偵測，並逐一剔除該錯誤，以保證平差成果的品質。惟此選項必須遞迴迭代演算，電子計算機會費工費時；應驗「魚與熊掌，不可兼得」。最小二乘平差身為演算法之一，應用於測量、地政、土木與航太各子領域，不勝枚舉。

第二章從定義說起，一律以矩陣算符履行代數。第三章敘述最常用的間接觀測平差。條件觀測平差納入第四章。第五、六章涉獵廣義的模式和深入的課題，以備進階。於文獻之後，附錄續含若干導來式，俾利釐清真象。專有名詞與頭字語的英文全稱則按筆劃統列於索引。

二、矩陣代數

將數據排成陣列，遂能進行整體的四則運算。

2.1 定義

矩陣為 m 橫列、 n 縱行尺量之長方形排列，

$$\mathbf{A}_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}), \quad (2.1)$$

此處整數下標 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ 和 $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ 。

$$\text{轉置矩陣為 } \mathbf{A}_{n,m}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ji})。$$

向量表示當式(2.1)行數 $n=1$ 時，

$$\mathbf{a}_{m,1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}; \quad (2.2)$$

則 $\mathbf{a}^T = (a_{11}, \dots, a_{m1})$ 或 $\mathbf{a} = (a_{11}, \dots, a_{m1})^T$ 。

於維度 $n=m$ 時，式(2.1)代表正方矩陣——方陣。對角方陣為矩陣中，僅對角線元素不為零，

$$\mathbf{A}_{n,n} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_n \end{pmatrix} = \text{diag}(k_1, \dots, k_n). \quad (2.3)$$

單位方陣為對角方陣(2.3)中，對角線元素之值均為 1，常以 $\mathbf{I}_n$ 表示之。

2.2 運算規則

矩陣加減法為 $\mathbf{A}_{r,s} \pm \mathbf{B}_{r,s} = \mathbf{C}_{r,s}$ ，即 $a_{ij} \pm b_{ij} = c_{ij}$ ，整數下標 $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ 和

$j \in \{1, 2, \dots, s\}$ ；且 $(\mathbf{A} \pm \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \pm \mathbf{B}^T$ 。矩陣加減法是可交換與結合的：

$\mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{C} = (\mathbf{A} - \mathbf{C}) + \mathbf{B}$ 。當尺量 k 乘矩陣： $k\mathbf{A} = \mathbf{C}$ ，意即 $ka_{ij} = c_{ij}$ 。

矩陣相乘之定義：

$$\mathbf{A}_{r,t} \mathbf{B}_{t,s} = \mathbf{C}_{r,s}, \quad (2.4)$$

於此 $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{it}b_{tj}$ ；每元素為相乘項之加總。矩陣相乘具有結合性並適用分配律：

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}), \quad (2.5)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}, \quad (2.6)$$

$$\alpha(\mathbf{AB}) = (\alpha\mathbf{A})\mathbf{B}, \quad (2.7)$$

$$(\mathbf{ABC})^T = \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T. \quad (2.8)$$

不論式(2.4)中維度 r 及 s 相等與否，矩陣相乘不具交換性質，一律必須言明是左乘或右乘。

對稱矩陣：滿足條件 $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ 的正方矩陣，例如，

$$\mathbf{A}_s = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & b_2 & b_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

逆方陣定義式為 $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{I}$ 。又因為 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$ ，故 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{I}$ 。對於滿秩的方陣而言，逆方陣能按 Cramer 規則寫成：

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \text{adj } \mathbf{A}, \quad (2.10)$$

其中 A_{ij} 為 $\mathbf{A}$ 中 a_{ij} 的餘因子——即拿掉第 i 列、第 j 行後子矩陣的行列式，且乘上符號 $(-1)^{i+j}$ ； $\text{adj } \mathbf{A}$ 為伴隨矩陣。逆陣 $\mathbf{A}^{-1}$ 存在，僅當 $|\mathbf{A}| \neq 0$ 。代數與幾何間，二階行列式為平行四邊形面積，見附錄 A。此外，

$$(\mathbf{ABC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}, \quad (2.11)$$

證明： $\mathbf{ABCC}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{I}$ 。欲得方陣相加之逆陣，

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}^{-1})^{-1}\mathbf{B}^{-1}. \quad (2.12)$$

其驗證： $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}^{-1})^{-1}\mathbf{B}^{-1} = (\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}$ 。相關的細節，可參考附錄 E。

因行列式之恆等： $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}|$ ，故 $|\mathbf{AA}^{-1}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{I}| = 1$ ，亦即 $|\mathbf{A}^{-1}| = (|\mathbf{A}|)^{-1}$ ；此外，對 $\mathbf{A}$ 的 p 次方由行列式特性知， $|\mathbf{A}^p| = (|\mathbf{A}|)^p$ 。方陣 $\mathbf{A}$ 中，任一橫列或縱行元素皆等於 0 時，或當任一橫列或縱行是其他列或行之線性組合時， $|\mathbf{A}| = 0$ 。倘若 $|\mathbf{A}| \neq 0$ ，稱該矩陣是秩足或非奇異的。

已知 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{I}$ ，等號兩邊同取轉置， $(\mathbf{A}^{-1})^T\mathbf{A}^T=\mathbf{I}=(\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}^T$ ，得證等式： $(\mathbf{A}^{-1})^T=(\mathbf{A}^T)^{-1}$ 。以固有值與固有向量求逆陣可應用式(D.8)或(D.10)。

方陣主對角線上元素之和定義為矩陣的跡，即 $\sum_i a_{ii}$ ；其性質為，

$$\text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{tr}\mathbf{A} + \text{tr}\mathbf{B}, \quad (2.13)$$

$$\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA}). \quad (2.14)$$

從左到右，式(2.14)得證， $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \sum_i \sum_j a_{ij} b_{ji} = \sum_j \sum_i b_{ji} a_{ij} = \text{tr}(\mathbf{BA})$ 。矩陣連

乘後的跡，可不受循序互換的影響：

$$\text{tr} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ m,n & n,p & p,m \\ & m,m & \end{pmatrix} = \text{tr} \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ p,m & m,n & n,p \\ & p,p & \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

若 $\mathbf{x}$ 是個行向量，則 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{x} \mathbf{x}^T)$ 。

2.2.1 內積和外積

向量之內積(見附錄 A)為，

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \cos \theta, \quad (2.16)$$

其中符號 θ 為斜面頂點處的銳角或鈍角。假設 $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = 0$ ， $\mathbf{x}$ 與 $\mathbf{y}$ 是正交的 ($\theta = 90^\circ$)。此外， $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ 代表 $\mathbf{x}$ 向量長度的平方；常記成 $|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$ ，長度亦可稱絕對值。

向量之外積為，

$$\mathbf{xy}^T = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

若 $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ ，則 $\mathbf{xx}^T$ 矩陣是向量 $\mathbf{x}$ 的散布矩陣，參考附錄 C。

2.2.2 二次形

尺量能以雙線性形， $\mathbf{x}_{1,n}^T \mathbf{A}_{n,n} \mathbf{y}_{n,1} = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \cdots + a_{nn}x_ny_n$ ，表達之；倘若

$\mathbf{x} = \mathbf{y}$ ，且度量 $\mathbf{A}$ 是對稱矩陣，即成二次形，

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} &= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2(a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \cdots + a_{n-1,n}x_{n-1}x_n) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j. \end{aligned} \quad (2.18)$$

代數中常出現二次形，以示幾何長度之平方，如 $\mathbf{A}$ 為單位方陣時， $\mathbf{x}^T \mathbf{I} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2$ 。

對所有實數值向量 $\mathbf{x}$ ，假如 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ ，則認為對稱 $\mathbf{A}$ 方陣是正定的。正定矩陣擁有滿秩，其固有值都大於零。正定性之一組充要條件為，

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0. \quad (2.19)$$

當至少存在一個 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ，使得實數二次形 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = q = 0$ ，則實數、對稱的 $\mathbf{A}$ 是半正定的。

2.3 誤差傳播

2.3.1 機率和期望值

一個隨機試驗的結果，稱作事件 A 。當試驗次數趨近於無窮大時，事件的機率 $P(A)$ 為 A 發生的總數與試驗總數之比值。倘若所有的試驗結果為 $A_i, i=1, 2, \dots, n$ ，則

$$0 \leq P(A_i) \leq 1 \text{ 與 } \sum_{i=1}^n P(A_i) = 1 \quad (2.20)$$

定出機率之極限。

對非獨立的事件而言，得用條件機率概念。設 $P(AB)$ 表示事件 A 與 B 的聯合機率，且 B 已經發生時，事件 A 發生之機率書寫成 $P(A|B)$ ，其定義為，

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \quad (2.21)$$

顯然地，若 A, B 是獨立的， $P(A|B) = P(A)$ 。因為事件 A, B 是可以互換的： $P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$ ，遂得

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}. \quad (2.22)$$

對可能的結果 $A_i, i=1, 2, \dots, n$ 而言，已知 B 已經發生時，

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}; \quad (2.23)$$

而 $P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \dots + P(B|A_n)P(A_n)$ ，續得

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)}, \quad (2.24)$$

此即 Bayes 定理。

隨機變數之期望定義為值域內，以各別變數出現的機率為權，總和所有的值——類似加權平均，

$$E(x) = \mu_x = \sum_{i=1}^n x_i P(x_i). \quad (2.25)$$

倘若值域是連續的，可用密度函數 $f(x)$ 表達機率為 $f(x)dx$ ，則

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \mu_x, \quad (2.26)$$

亦稱作 x 分布之平均值。當 $y = g(x)$ ， y 亦是隨機變數，其機率分布可由 x 的分布導來。尤其，吾人可用 $f(x)$ 直接計算 y 之期望值，

$$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx. \quad (2.27)$$

並可一般化到 n 維隨機向量函數(已知聯合機率密度函數時)，

$$E(g(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \dots, x_n) f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (2.28)$$

一般地說， $E(x^2) \neq (E(x))^2$ 。一個重要的、描述 x 分布之統計參數是均方值，

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx. \quad (2.29)$$

而 x 的均方根值為 $(E(x^2))^{1/2}$ 。

隨機變數的方差係指變數偏離其期望之均方值，

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(x))^2 f(x) dx = E(x^2) - (E(x))^2; \quad (2.30)$$

亦記成 $V(x)$ 。方差的平方根稱作標準差。故僅當變數的平均值等於零時，能視均方根值與標準差相等。

兩個隨機變數間之統計是相關概念。常以協方差來顯示關聯程度。協方差是兩個變量各偏離其平均，並乘積後的期望值，

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} &= E((x - E(x))(y - E(y))) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(x))(y - E(y)) f(x, y) dx dy \\ &= E(xy) - E(x) E(y). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Darbeheshti & Featherstone (2009) 論述協方差函數。經標準差 σ_x 與 σ_y 正規

化的協方差，名之為相關係數 $\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$ ， $-1 \leq \rho \leq 1$ ；它為 x, y 間線性相依

的指標。假設 x, y 是獨立的， $\rho = 0$ 。當 y 是 x 的線性函數時，則 $\rho = \pm 1$ 。

$$\text{設有一隨機向量，}\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x = \begin{pmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \\ \vdots \\ x_n - \mu_n \end{pmatrix}, \text{吾人能將元素方差與協方差排列}$$

于一個矩陣內，

$$\boldsymbol{\Sigma}_x = E((\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x)(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x)^T) = \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1 x_2} & \cdots & \sigma_{x_1 x_n} \\ \sigma_{x_2 x_1} & \sigma_{x_2}^2 & \cdots & \sigma_{x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{x_n x_1} & \sigma_{x_n x_2} & \cdots & \sigma_{x_n}^2 \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

此對稱的方陣稱為方差協方差或離勢矩陣，簡稱協方差矩陣。

假設取某 σ_0^2 當作權單位方差，則 $\mathbf{Q} = \frac{1}{\sigma_0^2} \boldsymbol{\Sigma}$ 依然是對稱的，名之為相關

權倒陣。當它是秩足的，其逆方陣為權矩陣：

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} = \sigma_0^2 \mathbf{\Sigma}^{-1}. \quad (2.33)$$

2.3.2 協方差傳播定律

通常，必須處理隨機變數之線性函數。依照期望運算，對常數係數而言，

$\mathbf{y} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{A} \mathbf{x}$ 之期望值為

$$E(\mathbf{y}) = E(\mathbf{a}_0 + \mathbf{A}\mathbf{x}) = E(\mathbf{a}_0) + E(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{A}E(\mathbf{x}), \quad (2.34)$$

此即平均值之傳播。進一步，協方差傳播定律，按 Leick (2004) 為，

$$\begin{aligned} \mathbf{\Sigma}_y &= E((\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y)(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y)^T) = E((\mathbf{y} - E(\mathbf{y}))(\mathbf{y} - E(\mathbf{y}))^T) \\ &= E((\mathbf{a}_0 + \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{a}_0 - \mathbf{A}E(\mathbf{x}))(\mathbf{a}_0 + \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{a}_0 - \mathbf{A}E(\mathbf{x}))^T) \\ &= E(\mathbf{A}(\mathbf{x} - E(\mathbf{x}))(\mathbf{x} - E(\mathbf{x}))^T \mathbf{A}^T) = \mathbf{A}E((\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x)(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x)^T) \mathbf{A}^T \\ &= \mathbf{A}\mathbf{\Sigma}_x \mathbf{A}^T. \end{aligned} \quad (2.35)$$

最小二乘平差理論，按 Koch (1999)，稱式(2.35)為誤差傳播定律。

平面極坐標計算成縱橫直角坐標為測量學基本技術之一，常引用它為誤差傳播的例子。設平面控制點暫位於坐標原點，第一象限中待測點(N, E)離原點距離(m)與標準差已知為 $r \pm \sigma_r$ 。從縱軸順鐘向，另獨立備妥至新點的方位角(rad)與標準差 $\alpha \pm \sigma_\alpha$ 。

於換算時， $N = r \cos \alpha$ 和 $E = r \sin \alpha$ 。微量參數間線性關係變成：
 $dN = \cos \alpha dr - r \sin \alpha d\alpha$ 和 $dE = \sin \alpha dr + r \cos \alpha d\alpha$ 。藉誤差傳播式(2.35)，吾人能討論縱橫坐標的精度，

$$\begin{pmatrix} \sigma_N^2 & \sigma_{NE} \\ \sigma_{EN} & \sigma_E^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -r \sin \alpha \\ \sin \alpha & r \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_r^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -r \sin \alpha & r \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_r^2 \cos^2 \alpha + r^2 \sigma_\alpha^2 \sin^2 \alpha & (\sigma_r^2 - r^2 \sigma_\alpha^2) \sin \alpha \cos \alpha \\ (\sigma_r^2 - r^2 \sigma_\alpha^2) \sin \alpha \cos \alpha & \sigma_r^2 \sin^2 \alpha + r^2 \sigma_\alpha^2 \cos^2 \alpha \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

直角坐標(m)標準差分別為， $\sigma_N = (\sigma_r^2 \cos^2 \alpha + r^2 \sigma_\alpha^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}$ 和 $\sigma_E = (\sigma_r^2 \sin^2 \alpha + r^2 \sigma_\alpha^2 \cos^2 \alpha)^{1/2}$ 。當 $\sigma_r = r \sigma_\alpha$ 式子成立，此式平方再提出後使得坐標計算前後精度不變，即 $\sigma_N = \sigma_E = \sigma_r$ 。既然 $\sigma_r = r \sigma_\alpha$ ，協方差等於零 ($\sigma_{NE} = \sigma_{EN} = 0$)，終使各方向上精度等級保持勻稱。誤差橢圓的細節，可見附錄 D。

習題

2.1 矩陣 **C** 有 m 列與 n 行， $m > n$ 且 **C** 之秩等於 n ，試證明 $(\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1}$ 運算得一對稱方陣。

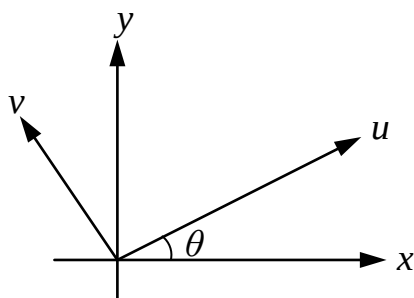
2.2 已知方陣 **A** 和同維度的對角方陣 **D**，試

(1) 例舉 **AD** 相乘的結果。

(2) 例舉 **DA** 相乘的結果。

(3) 問 $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{D}^{-1}$ 為那項結果之逆方陣，並列出驗證式。

2.3



如附圖，從平面直角坐標 (x, y) 系統經逆鐘向轉角 θ 到 (u, v) 系統，何以獲得

一正交轉換矩陣 $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ ，試

補繪點位圖並說明之。

2.4 以上標 T 表示轉置，已知向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ，試明列(1) $\mathbf{x}^T \mathbf{x}$ 的結果；(2) $\mathbf{x} \mathbf{x}^T$ 之結果；(3) $\text{tr}(\mathbf{x}^T \mathbf{x}) = \text{tr}(\mathbf{x} \mathbf{x}^T)$ 成果。

2.5 已知隨機變數 $Z_i, i=1, \dots, n$ ，其間互不相關。算術平均為 $\bar{Z} = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{n}$ ，設每一變數具相等的中誤差 σ ，試證明 $\sigma_{\bar{Z}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 。

三、間接觀測平差

於十九世紀初 Gauss (1809) 推出最小二乘原理：多變量常態分布觀測殘餘誤差加權平方和為最小。解算問題時，任務所促成的條件會使每單一觀測量匯集於方程的左側，並將待估計參數函數整置於方程的右側，更當觀測量數目大於未知參數者 ($n > u$)，統稱間接觀測平差，如 Hellwich & Ebner (2000) 或 Felus (2004) 所示。

3.1 估計式

先介紹基本的平差公式，再舉實用的坐標交會例子。最小二乘準則為極小化量測殘差加權平方和。經過線性化與移項，將數學模式記成：

$$\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{l}, \quad \sigma_0^2 \mathbf{Q}; \quad (3.1)$$

此處殘差向量 $\mathbf{v}$ 有 n 個元素，其所屬隨機、先驗的 $n \times n$ 量測協方差矩陣為 $\sigma_0^2 \mathbf{Q}$ ，以 σ_0^2 表示方差尺度因子。參數向量 $\mathbf{x}$ 有 u 個元素，配套得 $n \times u$ 設計矩陣 $\mathbf{A}$ ，其秩 $\text{rank} \mathbf{A}$ 等於 u 。約化觀測則併入 $n \times 1$ 向量 $\mathbf{l}$ 。此刻，已知 $\mathbf{A}$, $\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{l}$ ，待求解對象是 $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$ 與 σ_0^2 。

取二次形 $\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v}$ 對未知數的偏微分並設為零， $2\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}^T$ ，或轉置後為法方程組，

$$\mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (3.2)$$

將式(3.1)代入(3.2)， $\mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} (-\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{l}) = \mathbf{0}$ ，遂得 $\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{l}$ 。藉誤差傳播定律知， $\mathbf{Q}_x = (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^{-1} = (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^{-1}$ ；經代換，

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{l}, \quad (3.3)$$

且參數協方差矩陣滿足， $\mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{I}_u$ 。將式(3.3)代回(3.1)， $\mathbf{v} = \mathbf{l} - \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{l} - \mathbf{A}\mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{l} = (\mathbf{Q} - \mathbf{A}\mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T) \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{l}$ 。再藉誤差傳播知殘差協方差矩陣， $\mathbf{Q}_v = (\mathbf{Q} - \mathbf{A}\mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T) \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{Q} - \mathbf{A}\mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T) = \mathbf{Q} - \mathbf{A}\mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T$ 。經代換得，

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}_v \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{l}. \quad (3.4)$$

欲估計 σ_0^2 ，需透過二次形期望或積分的運算， $E(\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v}) = E(\text{tr}(\mathbf{v} \mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1})) = \text{tr}(E(\mathbf{v} \mathbf{v}^T) \mathbf{Q}^{-1}) = \text{tr}(\sigma_0^2 \mathbf{Q}_v \mathbf{Q}^{-1}) = \sigma_0^2 \text{tr}(\mathbf{Q} \mathbf{Q}^{-1} - \mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1}) = \sigma_0^2 (n - \text{tr}(\mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})) = \sigma_0^2 (n - u)$ 。故形成尺度估計式：

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v}}{n - u}, \quad (3.5)$$

於此分母表示多餘觀測數目，亦稱自由度。

3.2 交會間接平差

測量角度與距離後，得以空間前方交會，求定點位。如圖 3.1，已知控制點 a , c ，和待測點 b ；另獲有獨立的水平距離(m)觀測量與標準差： $d_1 \pm \sigma_{d_1}$, $d_2 \pm \sigma_{d_2}$ ；獨立的方位角(deg)與標準差： $\alpha_1 \pm \sigma_{\alpha_1}$, $\alpha_2 \pm \sigma_{\alpha_2}$ 。試求橫縱坐標(E_b , N_b)？為此先成立數學模式，

$$\begin{aligned} d_1 + v_{d_1} &= f_{d_1}(E_a, N_a, E_b, N_b) = ((E_b - E_a)^2 + (N_b - N_a)^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \alpha_1 + v_{\alpha_1} &= f_{\alpha_1}(E_a, N_a, E_b, N_b) = \tan^{-1}\left(\frac{E_b - E_a}{N_b - N_a}\right), \\ d_2 + v_{d_2} &= f_{d_2}(E_b, N_b, E_c, N_c) = ((E_c - E_b)^2 + (N_c - N_b)^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \alpha_2 + v_{\alpha_2} &= f_{\alpha_2}(E_b, N_b, E_c, N_c) = -\tan^{-1}\left(\frac{E_c - E_b}{N_c - N_b}\right) + 2\pi. \end{aligned} \quad (3.6)$$

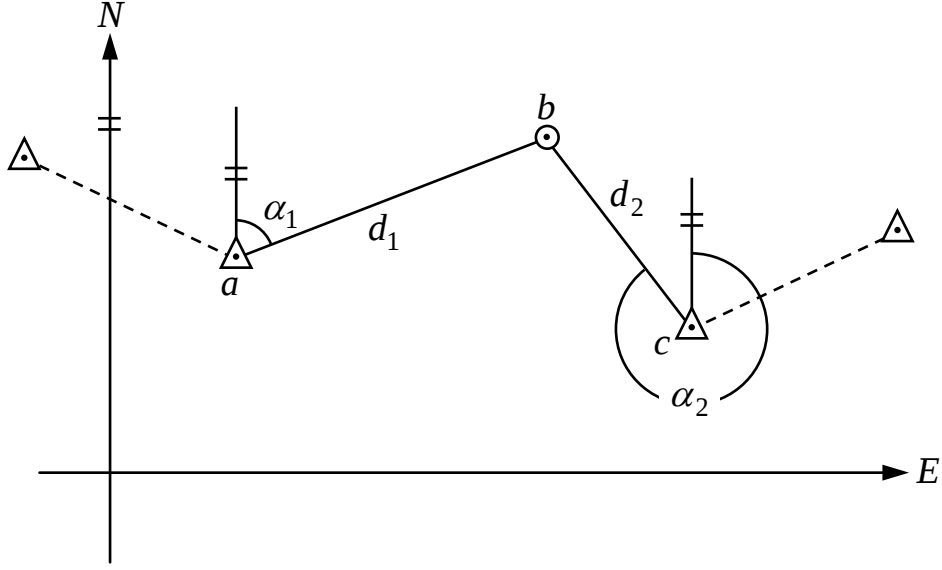


圖 3.1 前方交會

距離及方位角的協方差矩陣為 $\Sigma = \text{diag}(\sigma_{d_1}^2, \sigma_{\alpha_1}^2, \sigma_{d_2}^2, \sigma_{\alpha_2}^2)$ 。線性化函數 f_d 與 f_α ，即於近似坐標 (E_b^0, N_b^0) 處，做 Taylor 級數展開並捨棄高冪次 (≥ 2) 項，得誤差方程組，觀測量數目 $n = 4$ 與待測參數 $u = 2$ ：

$$\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{l}, \quad \mathbf{Q}^{-1} = \sigma_0^2 \Sigma^{-1} = \mathbf{P}; \quad (3.7)$$

此地， $\mathbf{v} = (v_{d_1}, v_{\alpha_1}, v_{d_2}, v_{\alpha_2})^T$ 為殘餘誤差向量；以偏導數結果為係數，

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\partial f_{d_1} / \partial E_b & -\partial f_{d_1} / \partial N_b \\ -\partial f_{\alpha_1} / \partial E_b & -\partial f_{\alpha_1} / \partial N_b \\ -\partial f_{d_2} / \partial E_b & -\partial f_{d_2} / \partial N_b \\ -\partial f_{\alpha_2} / \partial E_b & -\partial f_{\alpha_2} / \partial N_b \end{pmatrix} \text{ 為設計矩陣，亦稱線性連結或量測梯度矩}$$

陣譬如 $\partial f_{d_1} / \partial E_b = (E_b^0 - E_a) / \sqrt{(E_b^0 - E_a)^2 + (N_b^0 - N_a)^2} = (E_b^0 - E_a) / d_1^0$,

$\partial f_{d_1} / \partial N_b = (N_b^0 - N_a) / d_1^0$; $\partial f_{\alpha_1} / \partial E_b = (N_b^0 - N_a) / (d_1^0)^2$, $\partial f_{\alpha_1} / \partial N_b =$

$-(E_b^0 - E_a) / (d_1^0)^2$ 等。向量 $\mathbf{x} = (dE_b, dN_b)^T$ 表示坐標參數改正量；

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} -d_1 + f_{d_1}^0 \\ -\alpha_1 + f_{\alpha_1}^0 \\ -d_2 + f_{d_2}^0 \\ -\alpha_2 + f_{\alpha_2}^0 \end{pmatrix} \text{ 為約化觀測或閉合差向量。}$$

$$\mathbf{Q}^{-1} = \sigma_0^2 \begin{pmatrix} 1/\sigma_{d_1}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_{\alpha_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sigma_{d_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\sigma_{\alpha_2}^2 \end{pmatrix} \text{ 是權矩陣。鑑於多餘觀測等於 2，按}$$

最小二乘法可得坐標改正量 $\mathbf{x}$ 解答的應用式(3.3)。暫用先驗 σ_0^2 方差為尺度， $\sigma_0^2 \mathbf{Q}_x$ 表示 $\mathbf{x}$ 解協方差矩陣。並得觀測殘差 $\mathbf{v}$ 估計式(3.4)。類比地， $\sigma_0^2 \mathbf{Q}_v$ 為 $\mathbf{v}$ 解答協方差矩陣。

後驗單位權方差之估計為(3.5)。有識之士應該使用卡方變量 $\chi_{n-u}^2 = \frac{(n-u)\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}$ ，檢定變量 $\hat{\sigma}_0^2$ 與 σ_0^2 間統計相當性，見 Mikhail (1976)、Papoulis (1990) 和 Ghilani (2010)。

3.3 平差效能

3.3.1 加權平均值

設參數 μ 之觀測量 l_i 帶有期望為零的偶然 v_i 誤差 ($i=1, \dots, n$)，試求解該未知參數。誤差方程組能記成：

$$\begin{aligned} v_1 - \mu &= -l_1, \\ &\vdots \\ v_n - \mu &= -l_n. \end{aligned} \tag{3.8}$$

誤差機率密度函數循常態分布，為 $f(v_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_i} e^{-\frac{1}{2}(\frac{v_i}{\sigma_i})^2}$ 。吾人認定觀測量間互不相關，聯合機率密度函數為，

$$\begin{aligned} f(v_1, \dots, v_n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_1} e^{-\frac{1}{2}(\frac{v_1}{\sigma_1})^2} \dots \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_n} e^{-\frac{1}{2}(\frac{v_n}{\sigma_n})^2} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \frac{1}{\sigma_1} \dots \frac{1}{\sigma_n} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\frac{v_i}{\sigma_i})^2}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

當考慮微量 ε_i 時，某組 v_i 的或然率：

$$\begin{aligned} P(v_1 - \frac{\varepsilon_1}{2} \leq v_1 \leq v_1 + \frac{\varepsilon_1}{2}, \dots, v_n - \frac{\varepsilon_n}{2} \leq v_n \leq v_n + \frac{\varepsilon_n}{2}) \\ = \int_{-\varepsilon_1/2}^{\varepsilon_1/2} \dots \int_{-\varepsilon_n/2}^{\varepsilon_n/2} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \frac{1}{\sigma_1} \dots \frac{1}{\sigma_n} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\frac{v_i}{\sigma_i})^2} dv_1 \dots dv_n. \end{aligned} \quad (3.10)$$

欲求最高機率之 v_i ，相當於令 $\sum_{i=1}^n (\frac{v_i}{\sigma_i})^2$ 自變數最小；按此估計得最佳的參數 μ ，稱作最小二乘解答。取 σ_0^2 為比例因子， $\sum_{i=1}^n \frac{\sigma_0^2 v_i^2}{\sigma_i^2}$ ，平方和最小的條件仍在。當讓 $p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2}$ ，即得 $\sum_{i=1}^n p_i v_i^2$ 猶待極小化。

變數 p_i 表示觀測量 l_i 的權；因為共同的 σ_0^2 尺度，權乃是相對的數量。倘若 $\sigma_i^2 = \sigma_0^2$ ， $p_i = 1$ ，故稱 σ_0^2 為單位權方差。鑑於 $\sum_{i=1}^n p_i (l_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n p_i l_i^2 + \mu^2 \sum_{i=1}^n p_i - 2\mu \sum_{i=1}^n p_i l_i$ 為極小，故取偏導數後，

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left(\sum_{i=1}^n p_i v_i^2 \right) = 2\mu \sum_{i=1}^n p_i - 2 \sum_{i=1}^n p_i l_i = 0. \quad (3.11)$$

或 $\mu = \sum_{i=1}^n p_i l_i / \sum_{i=1}^n p_i$ ，估計式為 n 個觀測量之加權平均值。

此外，由誤差傳播定律(2.35)另得參數精度：

$$\sigma_\mu^2 = \sigma_0^2 / \sum_{i=1}^n p_i = \sigma_0^2 / (\sigma_0^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}) = 1 / \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}. \quad (3.12)$$

當簡化為等權觀測時($\sigma_i = \sigma$)，參數表示算術平均數 $\mu = \sum_{i=1}^n l_i / n$ ，其方差為 $\sigma_\mu^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ ，或標準差 $\sigma_\mu = \frac{1}{\sqrt{n}} \sigma$ 。

3.3.2 參數之相關

首先，本案例標示未知數間所存在的全相關。鑑於原設計矩陣的秩不足，法方程組的行列式等於零，求解會徒勞無功。

已知某設計矩陣 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ，觀測量 $\mathbf{l} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ 和誤差方程組 $\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{l}$ ，

並設等權的量測， $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{I}_4$ ，試求解未知數 $\mathbf{x}$ 。按最小二乘平差法之估計式

$$(3.3) : \mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{l} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{n}, \text{ 其中法方程組矩陣 } \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 30 & 10 & 10 \\ 10 & 4 & 4 \\ 10 & 4 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 80 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}。但行列式 |\mathbf{N}| = 0；故按式(2.10)，逆陣， $\mathbf{N}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{N}|} \text{adj}\mathbf{N}$ ，不復$$

存在。

倘若藉規畫或實驗之更動，另得改良的設計矩陣：

$$1) \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 則 } \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 80 \\ 30 \end{pmatrix}。 \text{ 此刻，逆陣 } (\mathbf{N}\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{I}_2) \text{ 存在，}$$

$$\mathbf{N}^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ -10 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/10 & -5/10 \\ -5/10 & 15/10 \end{pmatrix}。 \text{ 解答為 } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 16-15 \\ -40+45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}。$$

$$2) \text{ 或者，經重新安排後之 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{l} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \text{ 則新的}$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 30 & 10 & 9 \\ 10 & 4 & 3 \\ 9 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 77 \\ 27 \\ 24 \end{pmatrix}。 \text{ 依序，行列式為}$$

$$|\mathbf{N}| = 30 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 10 \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 90 - 30 - 54 = 6。 \text{ 伴隨矩陣，}$$

$$\text{adj}\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 10 & 9 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 10 & 9 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 30 & 9 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 30 & 9 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 30 & 10 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -6 \\ -3 & 9 & 0 \\ -6 & 0 & 20 \end{pmatrix}。 \text{ 逆陣，}$$

$$\mathbf{N}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1 \\ -1/2 & 3/2 & 0 \\ -1 & 0 & 10/3 \end{pmatrix}; \text{ 此刻 } \mathbf{N}^{-1}\mathbf{N} = \mathbf{I}_3 \text{ 為充要條件。未知數之估}$$

$$\text{算為 } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(77 - 27 - 48) \\ \frac{1}{2}(-77 + 81) \\ -77 + 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}。$$

以上數值簡例中，設計 $\mathbf{A}$ 矩陣與觀測 $\mathbf{l}$ 向量純屬假設，但最小二乘法能提供正確的解，可見 Kotsakis (2005)。一言蔽之，若參數間完全相依，雖一時無解，卻依然有計可施，以成就參數估計。

3.4 可靠度

所估計的觀測殘差量小未必表示最小二乘平差品質出色。Leick (2004)指明可靠度等同觀測量的可控性。回顧式(3.4)，估得間接觀測殘差為， $\mathbf{v} = \mathbf{Q}_v \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{l}$ 而且 $\mathbf{Q}_v = \mathbf{Q} - \mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T$ ，此處 $\mathbf{Q}$ 為先驗尺度化 $n \times n$ 協方差矩陣； $\mathbf{A}$ 是 $n \times u$ 設計矩陣與秩 $\text{rank} \mathbf{A} \leq u$ ，和 $\mathbf{Q}_x = (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^{-1}$ 。

鑑於方陣 $\mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1}$ 與 $\mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1}$ 皆具備冪等性，該等方陣之跡等於矩陣之秩(見式(5.20)所列之證)。結果為 $\text{tr}(\mathbf{Q}_v \mathbf{Q}^{-1}) = \text{tr}(\mathbf{I}_n - \mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1}) = n - \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1}) = n - \text{rank}(\mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}) = n - \text{rank} \mathbf{A}$ ，

$$\text{tr}(\mathbf{Q}_v \mathbf{Q}^{-1}) = \sum_{i=1}^n r_i, \quad (3.13)$$

此地 r_i 代表對角元素，跡為 $\sum_{i=1}^n r_i$ ；換言之，元素的累加等於自由度。吾人稱 r_i 為多餘數，表示第 i 量測對自由度的貢獻。

假設原始觀測的權矩陣 $\mathbf{Q}^{-1}$ 是對角線的， p_i 為對應的權重，多餘數為，

$$r_i = q_i p_i, \quad (3.14)$$

於此變數 q_i 表示 $\mathbf{Q}_v$ 的對角元素。基於不等式： $0 \leq q_i \leq \frac{1}{p_i}$ ，遂得

$$0 \leq r_i \leq 1. \quad (3.15)$$

當 r_i 趨近於 1 時，所估的殘差方差會趨近原量測方差；吾人認為平差增益高、成效佳。評量殘差標準差時，小等級數量未盡然是好消息；它卻能用來標定網形中的弱環。已知對角權值 $p_i = \sigma_0^2 / \sigma_i^2$ ，殘差標準差被估成，

$$\hat{\sigma}_{v(i)} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{q_i} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{\frac{r_i}{p_i}} = \frac{\hat{\sigma}_0}{\sigma_0} \sigma_i \sqrt{r_i}, \quad (3.16)$$

後驗的方差尺度源自式(3.5)。

於執行統計檢定時，Baarda (1968)以先驗的 σ_0^2 為尺度，將量測 i 僅含的粗差 ∇_i 歸給對立 H_a 假設。殘差向量解答可修正為，

$$\mathbf{v} | H_a = \mathbf{v} - \mathbf{Q}_v \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{e}_i \nabla_i, \quad (3.17)$$

其中係數 $\mathbf{e}_i = (\dots, 0, 1, 0, \dots)^T$ ，僅第 i 個元素等於 1，餘者皆為 0。式(3.17)向量的期望值、協方差矩陣與多維常態分布函數分別如下：

$$E(\mathbf{v} | H_a) = -\mathbf{Q}_v \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{e}_i \nabla_i, \quad (3.18)$$

$$\Sigma_{\mathbf{v} | H_a} = \Sigma_v = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_v, \quad (3.19)$$

$$\mathbf{v} | H_a \sim N(-\mathbf{Q}_v \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{e}_i \nabla_i, \sigma_0^2 \mathbf{Q}_v). \quad (3.20)$$

假設權源自對角 $\mathbf{Q}^{-1}$ 方陣，每個殘差會遵循單變量常態分布，

$$v_i | H_a \sim n(-q_i p_i \nabla_i, \sigma_0^2 q_i). \quad (3.21)$$

藉標準化，對立假設裡檢定統計量為，

$$H_a: w_a = \frac{v_i |H_a}{\sigma_{v(i)}} = \frac{v_i |H_a}{\sigma_0 \sqrt{q_i}} \sim n\left(\frac{-q_i p_i \nabla_i}{\sigma_0 \sqrt{q_i}}, 1\right) = n\left(\frac{-\nabla_i p_i \sqrt{q_i}}{\sigma_0}, 1\right). \quad (3.22)$$

對應地，在沒有 ∇_i 錯誤情況的虛無假設中，

$$H_0: w_0 = \frac{v_i |H_0}{\sigma_{v(i)}} \sim n(0, 1). \quad (3.23)$$

式(3.22)之非中心參數為，

$$\delta_i = \frac{-\nabla_i p_i \sqrt{q_i}}{\sigma_0} = \frac{-\nabla_i \sqrt{r_i}}{\sigma_i}, \quad (3.24)$$

亦稱 δ_i 平移參數。當虛無 H_0 假設為真的，卻接受對立 H_a 假設，犯下此第一型誤差的機率 α 代表檢定之顯著水準(圖 3.2)，

$$P(w_0 \leq t_{1-\alpha/2}, w_0 \geq t_{\alpha/2}) = \int_{-\infty}^{t_{1-\alpha/2}} n(0, 1) dx + \int_{t_{\alpha/2}}^{\infty} n(0, 1) dx = \alpha. \quad (3.25)$$

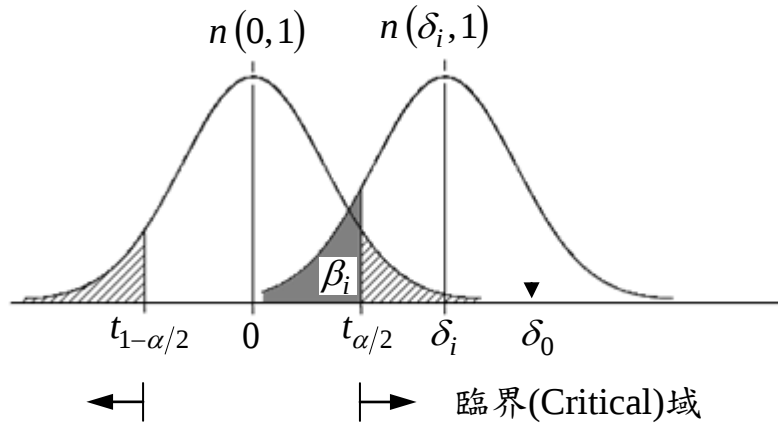


圖 3.2 定義非中心參數(Leick 2004)

當對立 H_a 為真的，卻接受虛無 H_0 假設，犯下此第二型誤差的機率 β_i 為統計檢定力，其為非中心 δ_i 變量的函數。由於式(3.24)中 ∇_i 粗差是未知的，故 δ_i 參數亦未知。

權宜之計：先預設檢定力為 β_0 ，逆向演算 δ_0 。當參數 $\delta_i \geq \delta_0$ 時，

$$P(|w_a| \leq t_{\alpha/2}) = \int_{-t_{\alpha/2}}^{t_{\alpha/2}} n(\delta_i, 1) dx \leq \beta_0. \quad (3.26)$$

將非中心 δ_0 參數代入式(3.24)即得，

$$|\nabla_{0i}| \geq \frac{\delta_0}{\sqrt{r_i}} \sigma_i, \quad (3.27)$$

此處式之右側項表達可偵測錯誤之門檻。一旦給定顯著性 α 與檢定力 β_0 機率，如表 3.1 所示，式(3.27)為能偵測的邊際錯誤，或者測得大於 ∇_{0i} 閾值的機率有 $100(1 - \beta_0)\%$ 。在相同的 δ_0 和 σ_i 數據下，某觀測的多餘數 r_i 值愈大，門檻變小，錯誤偵測本領愈強。

表 3.1 若干 α 與 β_0 機率和 δ_0 參數

α	β_0	δ_0
0.05	0.20	2.80
0.025	0.20	3.1
0.001	0.20	4.12
0.05	0.10	3.24
0.025	0.10	3.52
0.001	0.10	4.57

前述的機率 α 與 β_0 和參數 δ_0 僅適用於常態分布假設檢定，見式(3.22)與(3.23)。按式(3.17)的構想，每回可考量單獨錯誤對各個殘差的衝擊。倘若對某網形，逐一用式(3.27)計算 $1 - \beta_0$ 機率時全部觀測之邊際門檻，吾人能匯整成為該網形的偵錯本領，常稱作內可靠度。

從應用式子亦知，計算內可靠度只需要網形的函數與隨機模式即足(不需等外業觀測資料)。假定式(3.27)的 δ_0 等於 4 時，演算主旨不在於偵錯邊

際閾值的絕對量，而是有興趣了解偵錯指標與其間之變化。

錯誤 ∇_i 對觀測殘差的影響是，

$$\nabla v_i = -r_i \nabla_i, \quad (3.28)$$

參考式(3.21)；用其可概估該粗差，設 $\nabla v_i \gg v_i^*$ (原沒有錯誤時所能估的殘差)，

$$\nabla_i = -\frac{1}{r_i} \nabla v_i \approx -\frac{v_i^* + \nabla v_i}{r_i} = -\frac{v_i}{r_i}. \quad (3.29)$$

然而式(3.17)中 $\mathbf{Q}_v \mathbf{Q}^{-1}$ 不正巧是對角方陣，錯誤一定會影響許多優質的觀測。將式(3.28)影響量與錯誤本身暫疊加在一起，

$$\nabla v_i + \nabla_i = (1 - r_i) \nabla_i \approx -\frac{1 - r_i}{r_i} v_i, \quad (3.30)$$

其中分子項， $1 - r_i$ ，稱作吸收數。舉極端的例子，當多餘數 $r_i = 1$ 時，殘差完全反映錯誤量。當通常 $0 < r_i < 1$ 時，式(3.30)係數 $(1 - r_i)/r_i$ 分子與分母項同為小於 1 的數，可用以標示尚隱含的效應。總之， r_i 趨近於 1，觀測具全控性；反之，於 r_i 逼近 0 之際，因無力制衡任何大錯，觀測處於失控狀態。

外可靠度係指未能偵測到的錯誤對參數解答之衝擊。於間接觀測參數估計並含單獨存在的錯誤時，式(3.3)修正為，

$$\mathbf{x} = \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{e}_i \nabla_i), \quad (3.31)$$

其中係數 $\mathbf{e}_i = (\dots, 0, 1, 0, \dots)^T$ ，第 i 元素為 1，餘者為 0。第 i 個粗差的衝擊顯見於，

$$\nabla \mathbf{x} = -\mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{e}_i \nabla_i. \quad (3.32)$$

當考慮式(3.27)偵錯邊際 ∇_{0i} 門檻時，式子

$$\nabla_{\mathbf{x}_{0i}} = -\mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{e}_i \nabla_{0i}, \quad (3.33)$$

將該錯誤分配給各元素時，成果會牽涉定義參數時所採的坐標系統。Baarda (1968)另建議變通的關係式，

$$\lambda_{0i}^2 = \frac{\nabla_{\mathbf{x}_{0i}}^T \mathbf{Q}_x^{-1} \nabla_{\mathbf{x}_{0i}}}{\sigma_0^2}. \quad (3.34)$$

將式(3.27)與(3.33)代入並運算後得，

$$\begin{aligned} \lambda_{0i}^2 &= \frac{\nabla_{0i} \mathbf{e}_i^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{e}_i \nabla_{0i}}{\sigma_0^2} = \frac{\nabla_{0i}^2 \mathbf{e}_i^T \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_v \mathbf{Q}^{-1}) \mathbf{e}_i}{\sigma_0^2} \\ &= \frac{\nabla_{0i}^2 p_i (1 - r_i)}{\sigma_0^2} = \frac{1 - r_i}{r_i} \delta_0^2. \end{aligned} \quad (3.35)$$

變量 λ_{0i} 為參數解的外可靠度指數。對所有的觀測量而言，若 λ_{0i} 具有等數量級時，稱本網形系統外可靠度是均衡的。

3.5 粗差偵測

按屬性，粗差或錯誤既不是隨機誤差亦非系統誤差，故粗差偵測獨豎一幟，有一套自己的數據處理方針。粗差可稱為離群值，如同系統誤差亦名常差。於剔除離群值與改正常差後，約化觀測量所剩餘的隨機誤差部分才是最小二乘平差演算的對象。正確判定出小的粗差與較大的隨機誤差，不離統計假設檢定，見 Cen et al. (2003)。

以隨機樣本一致性 RANSAC 為粗差偵測法，Fischler & Bolles (1981)除首度演繹理論外，亦提供變通的直觀詮釋。已知每一數據組有 n 個樣本，並藉此能演算一套模式參數。倘若符號 w 代表樣本點恰為模式所屬內群值

的機率， w^n 為 n 個相容樣本的聯合機率。

另外設變量 z 為正確的內群數據組抽樣機率，則對於剔除離群值猶待嘗試抽樣次數 k ，吾輩能成立方程， $(1-w^n)^k = 1-z$ ，或經對數轉換和等量公理之用，

$$k = \log(1-z) / \log(1-w^n). \quad (3.36)$$

通常 RANSAC 偵測法能有效地處理極大量的樣本。就任務的狀況和需求，分析師必須憑經驗先定義變量 n, w 和 z 的數值，從而估算篩選 k 次數。

另一獨立的粗差偵測技術本於測量平差。當觀測量數目非遠大於未知參數數目時，可預期此數據搜評法有良好的成效。已知間接觀測平差 $n \times u$ 設計 $\mathbf{A}$ 矩陣，或誤差方程組(3.1) $\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{l}$ 和 $\sigma_0^2 \mathbf{Q}$ ，式(3.4)描述殘差解答，即 $\mathbf{v} = \mathbf{Q}_v \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{l}$ ，於此尺度化協方差矩陣為 $\mathbf{Q}_v = \mathbf{Q} - \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ 。

正規化係指殘差 v_i 除以所屬的形式誤差 $\sqrt{V(v_i)}$ ，於此 $V(v_i)$ 為 $\sigma_0^2 \mathbf{Q}_v$ 方陣的對角線元素。根據 Schwarz & Kok (1993)，正規化殘差遵循 τ 機率密度函數，

$$\tau_r = \frac{\sqrt{r} t_{r-1}}{\sqrt{r-1 + t_{r-1}^2}}, \quad (3.37)$$

此處記號 $r(=n-u)$ 表示自由度，記號 t 為 Student 分布函數。該檢定統計量， $v_i / \sqrt{V(v_i)}$ ，受測於由顯著水準所定閾值之假設檢定。先行剔除最離譜的觀測量，旋即重新整體平差。每回僅移除單一粗差，故以迭代數據搜評 IDS 方法稱之。

如果觀測量數目是海量的，一味追求它們的殘差協方差矩陣並不妥當。此時，先執行隨機樣本一致法運算，以利摒棄可能的粗差。一旦可掌握平差之繁複度時，再啟動迭代數據搜評法，以確保不復存在任何資料異常。基於迥異的理論，RANSAC 和 IDS 方法間之互補是可預期的。

習題

3.1 已知隨機變量向量 $\mathbf{l}$ 與尺度化協方差矩陣 $\mathbf{Q}$ ，今有變換式 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{l}$ ，當 $\mathbf{Q}_x$ 為 $\mathbf{x}$ 之協方差矩陣時，試證明 $\mathbf{Q}_x = (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^{-1}$ 。

3.2 請列出 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ 方陣之(1) 行列式；(2) 逆方陣。提示：原

陣與逆陣相乘，結果是單位方陣。

3.3 方差 $\hat{\sigma}_0^2$ 估計式恆等於觀測殘差二次形除以自由度。今等號左右邊分別做數學期望運算，是否 $E(\hat{\sigma}_0^2)$ 會是先驗方差尺度？此刻，說明本方程的意涵。

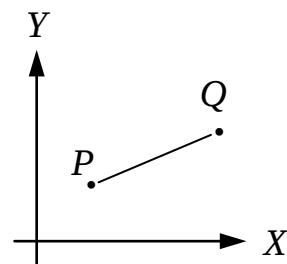
3.4 已知 P 、 Q 兩點的平面直角坐標 (X_P, Y_P) 和 (X_Q, Y_Q) ，如圖示，則

(1) 兩點間的距離 $r = r(X_P, Y_P, X_Q, Y_Q)$ 式子為何？

(2) 偏微商或偏導數 $\frac{\partial r}{\partial Y_Q}$ 式子為何？

(3) 點 P 到點 Q 之方位角 $\alpha = \alpha(X_P, Y_P, X_Q, Y_Q)$ 式子為何？

(4) 比照參考公式： $y = \tan^{-1} x$ ，則 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$ ；試列偏微商 $\frac{\partial \alpha}{\partial Y_Q}$ 式子。



3.5 兩組平面直角坐標系統間存在未知的橫向與縱向平移參數、尺度及旋轉參數。總計有 $n (\geq 3)$ 個非共線的坐標轉換用點位。對每單一控制點已知： $X = X_0 + (t \cos \theta)x + (t \sin \theta)y$ 和 $Y = Y_0 - (t \sin \theta)x + (t \cos \theta)y$ 。試採間接觀測平差法，僅視獨立且等權的 (X, Y) 坐標有隨機量測誤差 (vX, vY) ，明列第 i 點 $(1 < i < n)$ 兩條線性誤差方程式。

四、條件觀測平差

策略性數據處理有時僅牽涉觀測量之線性組合，不用牽連任一未知的幾何參數。所需的誤差方程組源自觀測量間的閉合條件，譬如平面三角形內角和等於 180° 常數、附和導線方位角平差、控制網形的角度平差、水準網形高程差之閉合(Teunissen 2003)。

4.1 估計式

條件觀測平差函數與隨機模式為，

$$\mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{l}, \quad \sigma_0^2 \mathbf{Q}; \quad (4.1)$$

此地向量 $\mathbf{v}$ 包含 n 個觀測誤差，所屬的 $n \times n$ 協方差矩陣為 $\sigma_0^2 \mathbf{Q}$ ，其中 σ_0^2 是(先驗)方差尺度因子。線性組合 $c \times n$ 矩陣以 $\mathbf{B}$ 表示，且因維度 $c < n$ ，秩 $\text{rank} \mathbf{B} = c$ 。約化觀測 $\mathbf{l}$ 向量含有 c 個元素。已知陣列為 $\mathbf{B}$, $\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{l}$ ，待求變量為 $\mathbf{v}$ 和 σ_0^2 。

最小二乘法要求殘差二次形為極小，且同時兼顧方程(4.1)。新建立未知的 $c \times 1$ 乘子 $\mathbf{k}$ 向量，得 Lagrange 函數 $\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v} - 2\mathbf{k}^T (\mathbf{B}\mathbf{v} - \mathbf{l})$ 。取該函數對 $\mathbf{v}$ 的偏微分並設為零， $2\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} - 2\mathbf{k}^T \mathbf{B} = \mathbf{0}^T$ ，或轉置後 $\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v} = \mathbf{B}^T \mathbf{k}$ ；兩向量間關係成為，

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q} \mathbf{B}^T \mathbf{k}. \quad (4.2)$$

將此代回式(4.1) $\mathbf{B} \mathbf{Q} \mathbf{B}^T \mathbf{k} = \mathbf{Q}_l \mathbf{k} = \mathbf{l}$ ，續得乘子與殘差向量解答，

$$\mathbf{k} = \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{l} = \mathbf{Q}_k \mathbf{l}, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q} \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_k \mathbf{l} = \mathbf{Q} \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_k \mathbf{B} \mathbf{Q} \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{l} = \mathbf{Q}_v \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{l}. \quad (4.4)$$

此間基於誤差傳播式(2.35)，由式(4.1)逕知 $\mathbf{Q}_l = \mathbf{BQB}^T$ 。由式(4.3)的傳播亦知 $\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_l^{-1}$ ；可代回式(4.3)，得證。從式(4.2)出發，結果是 $\mathbf{Q}_v = \mathbf{QB}^T \mathbf{Q}_k \mathbf{BQ}$ ，已用之於式(4.4)。

欲求 σ_0^2 尺度，需藉積分概念。運算二次形的期望值， $E(\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v}) = E(\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v}) = E(\mathbf{k}^T \mathbf{BQB}^T \mathbf{k}) = E(\mathbf{k}^T \mathbf{Q}_l \mathbf{k}) = E(\text{tr}(\mathbf{k} \mathbf{k}^T \mathbf{Q}_l)) = \text{tr}(\mathbf{Q}_l E(\mathbf{k} \mathbf{k}^T)) = \text{tr}(\sigma_0^2 \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{Q}_l) = \sigma_0^2 \text{tr} \mathbf{I}_c = \sigma_0^2 c$ 。因此形成尺度估計式：

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v}}{c}, \quad (4.5)$$

於此分母表示條件數目($c > 0$)。

4.2 幾何約制

常見的幾何條件肇因於圖形閉合，如三角形內角和等於 π 弧度。多邊形若有 n 個邊，則內角和條件為 $(n-2)\pi$ 。檢視圖 4.1，得 4 個獨立的角條件——3 個三角形閉合和 1 個中央站條件。

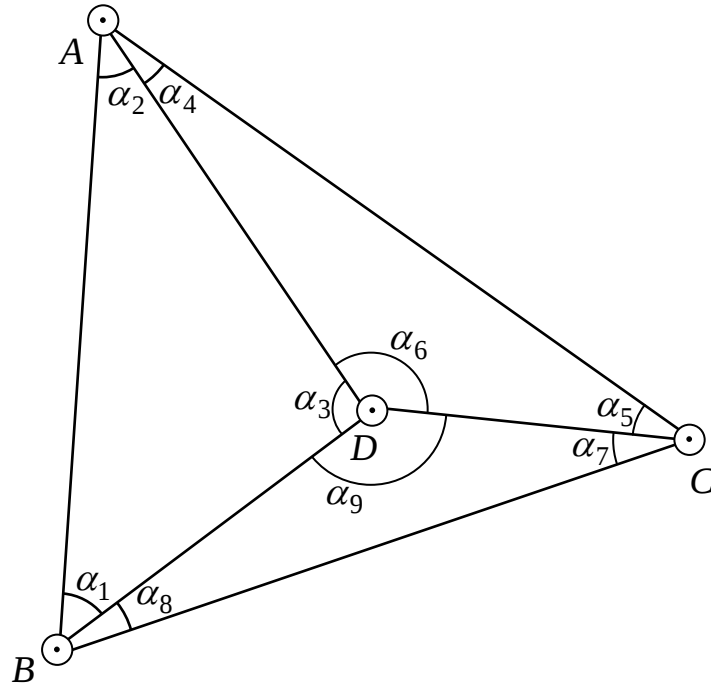


圖 4.1 簡易平面三角測量

暫舉一個三角形為例，獨立且等權的角度誤差促成條件， $(\alpha_1 + v_1) + (\alpha_2 + v_2) + (\alpha_3 + v_3) = \pi$ 。經移項知， $v_1 + v_2 + v_3 = \pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = l$ ，等號右側表示閉合差。呼應模式(4.1)，3(=n)個殘差 v_1, v_2 與 v_3 ，其組合係數全為1，以示連加。

由於獨立且等權，角度權矩陣是單位方陣。條件僅1個(=c)。依照式(4.3–4.4)，約化觀測的方差 $q_l^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$ 。乘子 $k = l/3$ 。殘差解答為，

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} (1 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} l = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} l = \begin{pmatrix} \frac{l}{3} \\ \frac{l}{3} \\ \frac{l}{3} \end{pmatrix}。每殘差估計值皆為閉合$$

差的三分之一，正符合直觀推斷。按式(4.5)亦得單位權方差 $\hat{\sigma}_0^2 = l^2/3$ 。

4.2.1 角條件

平面多邊圖形中，從某站任兩個鄰邊的水平夾角算起，每增加一個角度，能多生出一個邊的指向，足以構成圖形。額外角度量測會形成多餘的角條件。以 L 表示邊的數目和 A 為所觀測的夾角數目，獨立的角條件數目等於 $A - L + 1$ 。

返回原圖4.1任務， $A=9, L=6$ ，故角條件有4(=9–6+1)個。換成維度時， $n=9$ 和 $c=4$ 。置角度殘差於 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_9)^T$ ，先驗的 9×9 協方差矩陣於 $\sigma_0^2 \mathbf{Q}$ 。各依照幾何條件，式(4.1)中線性 4×9 組合矩陣

$$\text{為 } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ 約化觀測或閉合差向量}$$

$$\mathbf{l} = (\pi - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3, \pi - \alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_6, \pi - \alpha_7 - \alpha_8 - \alpha_9, 2\pi - \alpha_3 - \alpha_6 - \alpha_9)^T。$$

倘若 9 個獨立夾角均有相同的精度，則約化值協方差矩陣可寫成

$$\mathbf{Q}_l = \mathbf{B}\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}。條件平差的特質可從式(4.3)瞧出端倪，逆陣 $\mathbf{Q}_l^{-1}$ 的$$

$c \times c$ 維度源自條件數，而式(4.4)所算的殘差數目 n 一定會大於該 c 個條件數。

4.2.2 邊條件

平面三角網形中各式形狀取決於角度。邊的長短能左右圖形的大小。若藉正弦定律產生額外計算邊長的途徑時，即構成所謂的邊條件。以圖 4.1 順鐘向為例， $\overline{AB}$ 繞一圈仍等於 $\overline{AB}$ 邊。

以前方交會測定新站為推理依據。原基本三角形的邊數(=3)和站數(=3)先予以扣除，得 $n' - 3 - 2(s - 3) = n' - 2s + 3$ ，其中 n' 為邊的總數，和 s 表示測站的數目。回顧圖 4.1， $n' = 6, s = 4$ ，故邊條件有 $1 (= 6 - 8 + 3)$ 個。

$$\begin{aligned} \text{於 } \triangle ABD \text{ 中依正弦定律， } \overline{AB} &= \frac{\overline{AD} \sin \alpha_3}{\sin \alpha_1}。 \text{類比地，在 } \triangle ACD \text{ 中，} \\ \overline{AD} &= \frac{\overline{CD} \sin \alpha_5}{\sin \alpha_4}； \triangle BCD \text{ 中， } \overline{CD} = \frac{\overline{BD} \sin \alpha_8}{\sin \alpha_7}。 \text{末了在原 } \triangle ABD \text{ 中，} \\ \overline{BD} &= \frac{\overline{AB} \sin \alpha_2}{\sin \alpha_3}。 \text{經遞迴代換後， } \overline{AB} = \frac{\sin \alpha_3}{\sin \alpha_1} \frac{\sin \alpha_5}{\sin \alpha_4} \frac{\sin \alpha_8}{\sin \alpha_7} \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_3} \overline{AB}， \text{按等} \end{aligned}$$

量公理遂得非線性的邊條件，

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} \frac{\sin \alpha_5}{\sin \alpha_4} \frac{\sin \alpha_8}{\sin \alpha_7} = 1. \quad (4.6)$$

在估計角度殘差之前，必須與模式(4.1)接軌；式(4.6)尚需線性化，譬如對

分母項 α_7 角的偏導數是 $\frac{\sin \alpha_2 \sin \alpha_5 \sin \alpha_8}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_4 \sin^2 \alpha_7} (-\cos \alpha_7) = -\cot \alpha_7$ ，對分子項

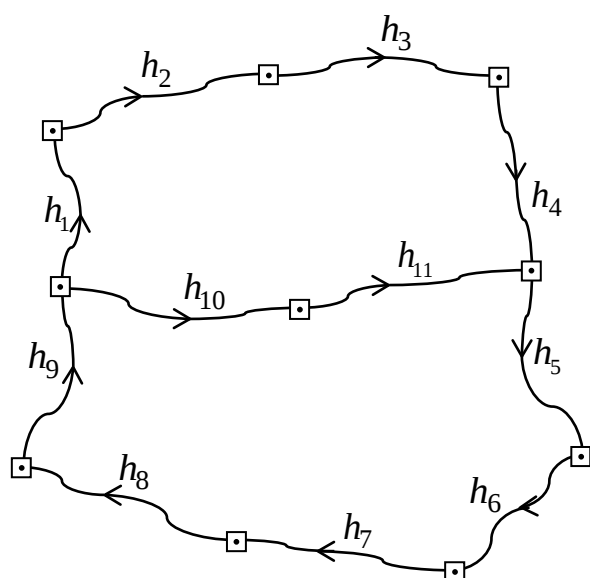
α_8 而言，式(4.6)的偏微商為 $\frac{\sin \alpha_2 \sin \alpha_5 \sin \alpha_8 \cos \alpha_8}{\sin \alpha_1 \sin \alpha_4 \sin \alpha_7 \sin \alpha_8} = \cot \alpha_8$ ，其他者亦然。

習題

4.1 設某平面多邊形有 n 個頂點，試推算外角總和等於 $(n+2)\pi$ 弧度。

4.2 於平面三角形中以相同的測角精度觀測 3 個頂角(deg)，和以相同的測距精度施測 3 段邊長(m)。試根據正弦定律列出夾角與邊長應滿足的條件後，定義殘差向量，及排列線性化組合矩陣。

4.3



見示意圖，水準測量提供各線段高程差(m)成果 h_i ，於此 $i \in \{1, 2, \dots, 11\}$ 。各路徑約略等長，適合以等權觀測條件平差數據。試列式並敘述如何能獲得 h_i 之殘差 v_i 。

4.4 以圖示平面支柱四邊形為例，總共測量 8 個水平夾角。吾人能寫出下列的角條件，

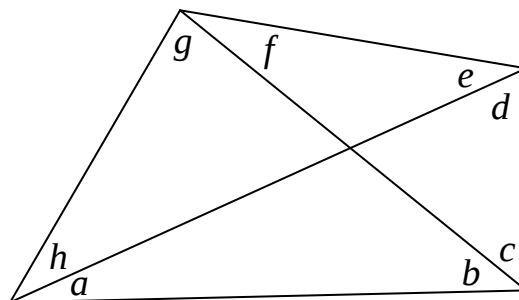
$$a + b + c + d + e + f + g + h = 2\pi,$$

$$a + b + c + d = \pi,$$

$$c + d + e + f = \pi,$$

$$e + f + g + h = \pi,$$

$$g + h + a + b = \pi.$$



僅只三個角條件是獨立的，何故？試列式說明之。

五、混合模式平差

利用專業儀器能獲得量測數據，如方向間角度、空間距離、影像灰階(Wolf & Dewitt 2000; Usai 2003)——另如氣溫和氣壓、單視複數、重力梯度等。該觀測量與欲求解參數間，依任務之幾何或物理條件，會成立非線性關係。端視性質與需求，觀測數值間常允許線性組合運算，以及未知參數間尚存在其他的約制條件(Mikhail 1976; Kuang et al. 1996)。

透過 Taylor 級數展開與留住一次項，再透過迭代演算，此技術不失為務實求解非線性問題之道。混合數學模式能表達成，

$$\mathbf{B}\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{l}, \quad D(\mathbf{v}) = \sigma_0^2 \mathbf{Q}; \quad (5.1)$$

其中線性組合 $c \times n$ 矩陣為 $\mathbf{B}$ ，維度 $c \leq n$ 以及秩 $\text{rank} \mathbf{B} = c$ ；觀測殘差 $n \times 1$ 向量為 $\mathbf{v}$ 。設計、量測梯度 $c \times u$ 矩陣示於 $\mathbf{A}$ ，維度 $c > u \geq 1$ 且秩 $\text{rank} \mathbf{A} = u$ ；參數改正 $u \times 1$ 向量為 $\mathbf{x}$ 。約化觀測量 $c \times 1$ 向量以 $\mathbf{l}$ 表示。先驗量測協方差 $n \times n$ 對稱、正定矩陣為離勢矩陣 $D(\mathbf{v})$ 。單位權方差 σ_0^2 泛稱尺度因子；尺度化協方差 $n \times n$ 矩陣為 $\mathbf{Q}$ 。

方程組 $\mathbf{B}\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{l}$ 又名函數模式，而矩陣 $\sigma_0^2 \mathbf{Q}$ 代表隨機模式。式(5.1)中向量 $\mathbf{l}$ 與矩陣 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{A}$ 及 $\mathbf{Q}$ 是已知的，猶待估計者為 σ_0^2 和向量 $\mathbf{x}$ 與 $\mathbf{v}$ ——含 $\mathbf{Q}_x$ 與 $\mathbf{Q}_v$ 之推估。

5.1 觀測及參數

5.1.1 參數解答

殘差二次形 $\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v}$ 或殘差加權平方和，表示待極小化目標函數。為建立關聯，藉 Lagrange 乘子 $c \times 1$ 向量 $\mathbf{k}$ 得函數，

$$L = \mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v} - 2\mathbf{k}^T (\mathbf{B}\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{l}) = \mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v} - 2(\mathbf{v}^T \mathbf{B}^T + \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T - \mathbf{l}^T) \mathbf{k}, \quad (5.2)$$

其內按式(5.1)， $\mathbf{B}\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{l} = \mathbf{0}$ 。對尺量 L 取極值，列偏導數得零向量，

$$\frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v} - \mathbf{B}^T \mathbf{k} = \mathbf{0}, \quad (5.3)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{A}^T \mathbf{k} = \mathbf{0}. \quad (5.4)$$

由式(5.3)知，

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}\mathbf{B}^T \mathbf{k}. \quad (5.5)$$

將其代入式(5.1)，求解乘子向量 $\mathbf{k}$ 為，

$$\mathbf{k} = (\mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{B}^T)^{-1}(\mathbf{l} - \mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{Q}_l^{-1}(\mathbf{l} - \mathbf{A}\mathbf{x}), \quad (5.6)$$

其中顯見屬於 $\mathbf{I}$ 對稱、分塊對角的 $c \times c$ 方陣定義， $\mathbf{Q}_l = \mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{B}^T$ 而且秩為 $\text{rank}\mathbf{Q}_l = c$ 。

續將式(5.6)代入法方程組(5.4)，求解參數向量 $\mathbf{x}$ 為，

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{l} = \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{l}; \quad (5.7)$$

時或記成 $\hat{\mathbf{x}}$ 及 $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}$ ，表示估計解。鑑於誤差傳播定律， $\mathbf{Q}_x = (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{Q}_l \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{A})^{-1} = (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{A})^{-1}$ ；此外， $\text{rank}\mathbf{Q}_x = u$ 。按式(5.6, 5.7)得另一款乘子向量，

$$\mathbf{k} = \mathbf{Q}_l^{-1}(\mathbf{I}_c - \mathbf{A}\mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_l^{-1})\mathbf{l}. \quad (5.8)$$

經應用誤差傳播能推演成，

$$\mathbf{k} = \mathbf{Q}_k \mathbf{l}, \quad (5.9)$$

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_l^{-1}(\mathbf{I}_c - \mathbf{A}\mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_l^{-1})\mathbf{Q}_l(\mathbf{I}_c - \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{A}\mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T)\mathbf{Q}_l^{-1}$$

$$\begin{aligned}
&= (\mathbf{I}_c - \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T) (\mathbf{I}_c - \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T) \mathbf{Q}_l^{-1} = (\mathbf{I}_c - \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T) \mathbf{Q}_l^{-1} \\
&= \mathbf{Q}_l^{-1} - \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \\
&= \mathbf{Q}_l^{-1} (\mathbf{Q}_l - \mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T) \mathbf{Q}_l^{-1}.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

按 $\mathbf{v} = \mathbf{Q} \mathbf{B}^T \mathbf{k}$ 式(5.5)續知殘差向量 $\mathbf{v}$ 及 $\mathbf{Q}_v$ 解答，

$$\mathbf{v} = \mathbf{Q}_v \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{l}, \tag{5.11}$$

$$\mathbf{Q}_v = \mathbf{Q} \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_k \mathbf{B} \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_l^{-1} (\mathbf{Q}_l - \mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T) \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{B} \mathbf{Q}; \tag{5.12}$$

它們與 $\hat{\mathbf{v}}$ 及 $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}}$ 估計解同義。回顧式(5.1, 5.3, 5.4)，尚能明列對稱的總法方程組如下，

$$\begin{array}{c} n \\ c \\ u \end{array} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^{-1} & -\mathbf{B}^T & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B} & \mathbf{0} & -\mathbf{A} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{A}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{k} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{l} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \tag{5.13}
\begin{array}{ccc} n & c & u \end{array}$$

根據式(5.5)，當等號兩側各左乘上 $\mathbf{B}$ 時則形成，

$$\mathbf{B} \mathbf{v} = \mathbf{B} \mathbf{Q} \mathbf{B}^T \mathbf{k} = \mathbf{Q}_l \mathbf{k}. \tag{5.14}$$

亦根據 $\mathbf{v} = \mathbf{Q} \mathbf{B}^T \mathbf{k}$ 和 $\mathbf{v} = \mathbf{Q}_v \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{l}$ ，殘差二次形能充分演變為，

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v} &= \mathbf{k}^T \mathbf{B} \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{B}^T \mathbf{k} = \mathbf{k}^T \mathbf{B} \mathbf{Q} \mathbf{B}^T \mathbf{k} \\
&= \mathbf{k}^T \mathbf{Q}_l \mathbf{k} \\
&= (\mathbf{Q}_l \mathbf{k})^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{Q}_l \mathbf{k} = (\mathbf{B} \mathbf{v})^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{B} \mathbf{v} \\
&= \mathbf{v}^T \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{B} \mathbf{Q}_v \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{l} = \mathbf{v}^T \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_l^{-1} (\mathbf{Q}_l - \mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T) \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{l} \\
&= \mathbf{l}^T \mathbf{Q}_l^{-1} (\mathbf{Q}_l - \mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T) \mathbf{Q}_l^{-1} (\mathbf{Q}_l - \mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T) \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{l} \\
&= \mathbf{l}^T \mathbf{Q}_l^{-1} (\mathbf{Q}_l - \mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T) \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{l}
\end{aligned} \tag{5.15}$$

$$= \mathbf{l}^T \mathbf{Q}_k \mathbf{l}. \quad (5.16)$$

為求解尺度性 σ_0^2 方差，額外引進二次形期望條件：

$$\begin{aligned} E(\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v}) &= E(\mathbf{k}^T \mathbf{Q}_l \mathbf{k}) = E(\text{tr}(\mathbf{k}^T \mathbf{Q}_l \mathbf{k})) = E(\text{tr}(\mathbf{k} \mathbf{k}^T \mathbf{Q}_l)) = \text{tr}(E(\mathbf{k} \mathbf{k}^T) \mathbf{Q}_l) \\ &= \text{tr}((\mathbf{\Sigma}_k + E(\mathbf{k})E(\mathbf{k}^T)) \mathbf{Q}_l) = \text{tr}(\sigma_0^2 \mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_l) \\ &= \sigma_0^2 \text{tr}(\mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_l), \end{aligned} \quad (5.17)$$

此間式(5.5)期望值等於 $E(\mathbf{v}) = \mathbf{Q} \mathbf{B}^T E(\mathbf{k}) = \mathbf{0}$ ，故推理 $E(\mathbf{k})$ 必為零期望向量。值得留意地， $c \times c$ 矩陣 $\mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_l$ 代表一冪等方陣。道理能印證於 $\mathbf{k} = \mathbf{Q}_k \mathbf{l}$ (5.9)。憑誤差傳播定律知 $\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_l \mathbf{Q}_k^T$ ；等號兩邊同時右乘 $\mathbf{Q}_l$ 矩陣即得 $\mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_l = \mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_l \mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_l = (\mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_l)^2$ 。

根據 Koch (1999) 第 49 頁定理：任何冪等方陣 $\mathbf{Y}$ 之秩等於其跡，或 $\text{rank} \mathbf{Y} = \text{tr} \mathbf{Y}$ 。藉秩因子分解知(維度 $r < m$)，

$$\mathbf{Y} = \underset{m,r}{\mathbf{R}} \underset{r,m}{\mathbf{S}}. \quad (5.18)$$

依給定知 $\mathbf{R} \mathbf{S} \mathbf{R} \mathbf{S} = \mathbf{R} \mathbf{S}$ ；等號兩側左乘左逆陣 $\mathbf{L}$ 與右乘右逆陣 $\mathbf{T}$ 後得， $\mathbf{L} \mathbf{R} \mathbf{S} \mathbf{R} \mathbf{S} \mathbf{T} = \mathbf{L} \mathbf{R} \mathbf{S} \mathbf{T}$ ，故形式上必須成立，

$$\mathbf{S} \mathbf{R} = \mathbf{I}_r, \quad (5.19)$$

$$\text{tr}(\mathbf{S} \mathbf{R}) = \text{tr}(\mathbf{R} \mathbf{S}) = \text{tr} \mathbf{Y} = \text{tr} \mathbf{I}_r = r = \text{rank} \mathbf{Y}. \quad (5.20)$$

將式(5.20)應用於式(5.17)遂得 $E(\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v}) = \sigma_0^2 \text{tr}(\mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_l) = \sigma_0^2 \text{rank}(\mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_l) = \sigma_0^2(c-u)$ 。正整數 $c-u$ 為條件式數目減去參數數目，稱作自由度。因此，尺度性 σ_0^2 方差之最佳線性不偏估計式為，

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v}}{c - u}. \quad (5.21)$$

混合模式(5.1)最小二乘參數估計——即式(5.13)解答及協方差矩陣，分別為待求參數 $(\mathbf{x}, \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_x)$ ，Lagrange 乘子 $(\mathbf{k}, \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_k)$ 與觀測殘差 $(\mathbf{v}, \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_v)$ ——各明列於式(5.7, 5.9 與 5.11)。

於矩陣 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ 時，則式(4.3–4.5)提供條件觀測平差解答。當模式(5.1)中矩陣 $\mathbf{B} = \mathbf{I}_n$ 時，所列舉的公式代表間接觀測最小二乘平差估計式(3.3–3.5) (Leick 2004; Gruen & Akca 2005)。

5.1.2 方差分量估計

於式(5.1)中隨機模式僅應用單一尺度 σ_0^2 因子。此非零的尺度或大或小不會影響參數解(5.7)，因為 $(\sigma_0^2 \mathbf{Q}_x) \mathbf{A}^T (\sigma_0^2 \mathbf{Q}_l)^{-1} \mathbf{1} = \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{1}$ ，答案不變。

當考量多元的觀測群時，不同的群尚需反映相異的尺度。此情況可應用方差分量估計式。設有 $m(>1)$ 個方差分量，各自對應一個半正定陪伴矩陣 $\mathbf{C}$ ，則平差的隨機模式亦能藉 $\sigma_0^2 \mathbf{Q} = \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \mathbf{C}_i$ ，以表達多元尺度。

如同處理 σ_0^2 的作法，在平差演算前均設乘係數等於 $\sigma_i^2 = 1$ ，即 $\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^m \mathbf{C}_i$ 。在迭代平差演算過程中，會檢視逼近滿意程度 $\hat{\sigma}_i^2 \approx 1$ ，俾利輸出平差結果。藉積分運算，殘差二次形的期望值為 $E(\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v}) = E(\text{tr}(\mathbf{v} \mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1})) = \text{tr}(E(\mathbf{v} \mathbf{v}^T) \mathbf{Q}^{-1}) = \text{tr}(\sigma_0^2 \mathbf{Q}_v \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{Q}^{-1}) = \text{tr}(\mathbf{Q}_v \mathbf{Q}^{-1} (\sigma_0^2 \mathbf{Q}) \mathbf{Q}^{-1}) = \text{tr}(\mathbf{Q}_v \mathbf{Q}^{-1} \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \mathbf{C}_i \mathbf{Q}^{-1}) = \sum_{i=1}^m \sigma_i^2 \text{tr}(\mathbf{Q}_v \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C}_i \mathbf{Q}^{-1})$ 。

例行的二次形可代換成 $\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v} = \mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \sum_{i=1}^m \mathbf{C}_i \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^m \mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C}_i \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v}$ 。倘若每個項能逐一對應到期望項，或 $E(\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C}_i \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v}) = \sigma_i^2 \text{tr}(\mathbf{Q}_v \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C}_i \mathbf{Q}^{-1})$ ，則最佳不偏方差分量估計式為，

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C}_i \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v}}{\text{tr}(\mathbf{Q}_v \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{C}_i \mathbf{Q}^{-1})}, \quad i \in \{1, 2, \dots, m\}. \quad (5.22)$$

於下回迭代演算前，令 $\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^m \hat{\sigma}_i^2 \mathbf{C}_i$ 為尺度更新的協方差矩陣。如果無一例外， $\hat{\sigma}_i^2 \approx 1$ ，平差演算可告一段落。關於局部最佳不變二次不偏估計法，可見 Wang et al. (1998) 和 Crocetto et al. (2000)。

5.2 代數與幾何

二次形反映變換向量長度之平方。雙線性形則為廣義之內積，足以表達超平面向量間之夾角(Koch 1999)。對閉合三角形而言，如圖 5.1，並考慮二次形或雙線性度量 $\mathbf{Q}_l^{-1}$ 方陣時，原約化觀測向量長度之平方是 $\mathbf{l}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{l}$ 。

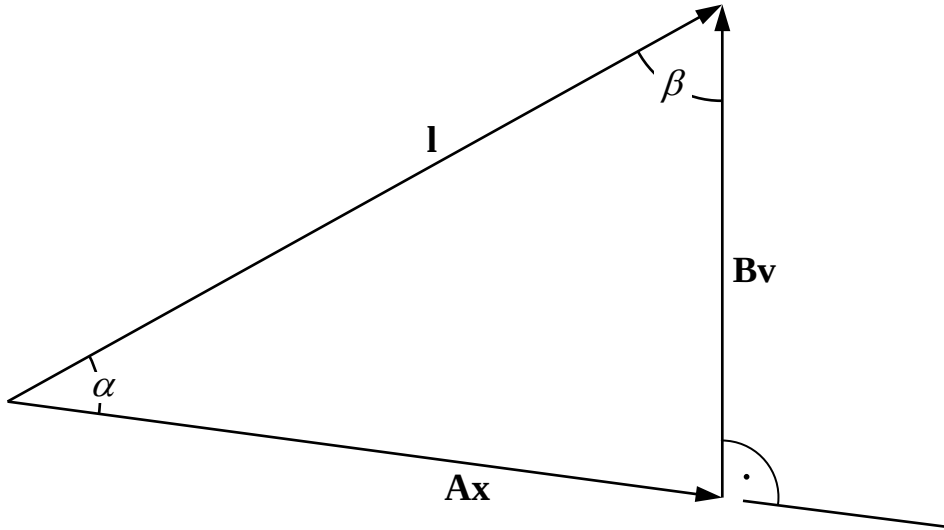


圖 5.1 Euclid 向量 $(\mathbf{Bv}, \mathbf{Ax}, \mathbf{l}) \in E^c$ 空間之投影(Wu 2003)

另外，投影向量長度平方分別為，

$$\begin{aligned} (\mathbf{Ax})^T \mathbf{Q}_l^{-1} (\mathbf{Ax}) &= \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{Ax} = \mathbf{l}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{AQ}_x \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{AQ}_x \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{l} \\ &= \mathbf{l}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{AQ}_x \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{l}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{Bv})^T \mathbf{Q}_l^{-1} (\mathbf{Bv}) &= \mathbf{v}^T \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{Bv} = \mathbf{l}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{BQ}_v \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{BQ}_v \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{l} \\ &= \mathbf{l}^T \mathbf{Q}_l^{-1} (\mathbf{Q}_l - \mathbf{AQ}_x \mathbf{A}^T) \mathbf{Q}_l^{-1} (\mathbf{Q}_l - \mathbf{AQ}_x \mathbf{A}^T) \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{l} \\ &= \mathbf{l}^T \mathbf{Q}_l^{-1} (\mathbf{I}_c - \mathbf{AQ}_x \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_l^{-1}) \mathbf{l} = \mathbf{l}^T \mathbf{Q}_l^{-1} (\mathbf{Q}_l - \mathbf{AQ}_x \mathbf{A}^T) \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{l} \end{aligned}$$

$$= \mathbf{I}^T (\mathbf{Q}_l^{-1} - \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_l^{-1}) \mathbf{l}. \quad (5.24)$$

推演公式時用到關係式(5.7, 5.11)。續問向量間之雙線性形，

$$\mathbf{l}^T \mathbf{Q}_l^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{x}) = \mathbf{l}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{l}. \quad (5.25)$$

此與式(5.23)全等。再者，

$$\begin{aligned} \mathbf{l}^T \mathbf{Q}_l^{-1} (\mathbf{B} \mathbf{v}) &= \mathbf{l}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{B} \mathbf{Q}_v \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{l} = \mathbf{l}^T \mathbf{Q}_l^{-1} (\mathbf{Q}_l - \mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T) \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{l} \\ &= \mathbf{l}^T (\mathbf{Q}_l^{-1} - \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_l^{-1}) \mathbf{l}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

其亦全等於式(5.24)。

5.2.1 正交投影

向量間正交性為，

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \mathbf{x})^T \mathbf{Q}_l^{-1} (\mathbf{B} \mathbf{v}) &= \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{B} \mathbf{v} = \mathbf{l}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{B} \mathbf{Q}_v \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{l} \\ &= \mathbf{l}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_l^{-1} (\mathbf{Q}_l - \mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T) \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{l} \\ &= \mathbf{l}^T \mathbf{Q}_l^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T - \mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T) \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{l} = \mathbf{l}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{0} \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{l} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.27)$$

殊途同歸，按餘弦定律(或按內積定義)知，

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{l}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{l}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{l}} \sqrt{(\mathbf{A} \mathbf{x})^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x}}}, \quad (5.28)$$

$$\cos \beta = \frac{\mathbf{l}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{B} \mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{l}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{l}} \sqrt{(\mathbf{B} \mathbf{v})^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{B} \mathbf{v}}}. \quad (5.29)$$

經代入式(5.23–5.26)約化，並取平方和以檢視正交投影性質，

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = \frac{\mathbf{l}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{l}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{l}} + \frac{\mathbf{l}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{B} \mathbf{v}}{\mathbf{l}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{l}} = \frac{\mathbf{l}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{l}}{\mathbf{l}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{l}} = 1. \quad (5.30)$$

鑑於畢氏定理， $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ ，能推得 $\sin \alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \beta$ ，故 $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ 或經等量公理之用， $\alpha + \beta = \pi/2$ 。

5.2.2 投影算子

對廣義內積 $\mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{y}$ ——含對稱、正定方陣 $\mathbf{V}$ ——而言，矩陣 $\mathbf{R}$ 為正交投影算子，當且僅當 $\mathbf{R}$ 是幂等的，以及 $\mathbf{V} \mathbf{R}$ 是對稱的。設 $\mathbf{A}$ 為一 $m \times n$ 矩陣，針對 $\mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{y}$ 將 E^m 向量正交投影到 $\mathbf{A}$ 之行空間時，該投影算子具下列廣義逆元之形，據 Koch (1999) 第 66 頁所載，

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{V} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{V}. \quad (5.31)$$

基於 $\mathbf{R} \mathbf{A} = \mathbf{A}$ ，下式成立，

$$(\mathbf{I} - \mathbf{R}) \mathbf{A} = \mathbf{0}. \quad (5.32)$$

投影到 $\mathbf{A}$ 之正交補餘定義為 $\mathbf{I} - \mathbf{R}$ 。交換律能適用於此矩陣相乘： $\mathbf{R}(\mathbf{I} - \mathbf{R}) = \mathbf{R} - \mathbf{R}^2 = (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{R}$ 。無庸置疑，幂等性仍存在， $(\mathbf{I} - \mathbf{R})^2 = (\mathbf{I} - \mathbf{R})(\mathbf{I} - \mathbf{R}) = \mathbf{I} - \mathbf{R} - \mathbf{R} + \mathbf{R}^2 = \mathbf{I} - \mathbf{R}$ 。

最小二乘參數與殘差解答(5.7, 5.11)必須滿足原始混合模式(5.1)，其理與圖 5.1 所示的正交投影互為因果。藉 $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{l}$ ，得投影算子 $\mathbf{R} = \mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_l^{-1}$ ——具幂等性 $\mathbf{R}^2 = \mathbf{R}$ 。續藉 $\mathbf{B} \mathbf{v} = \mathbf{B} \mathbf{Q}_v \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{l}$ ，得新投影算子 $\mathbf{B} \mathbf{Q}_v \mathbf{B}^T \mathbf{Q}_l^{-1} = \mathbf{I}_c - \mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_l^{-1} = \mathbf{I}_c - \mathbf{R}$ ，其恰為前者之正交補餘。故驗算成立， $\mathbf{B} \mathbf{v} + \mathbf{A} \mathbf{x} = (\mathbf{I}_c - \mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_l^{-1}) \mathbf{l} + \mathbf{A} \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_l^{-1} \mathbf{l} = \mathbf{I}_c \mathbf{l} = \mathbf{l}$ 。

5.3 差分組合

先整合若干觀測量成為約制條件，而其中又存在待估計的參數時，線性化該條件後所得的誤差方程組，稱作混合模式(5.1)。

一個典型的例子出自全球導航 GNSS 衛星相位數據定位任務。圖 5.2 中地面 i 點為固定且坐標已知的參考站，點 j 表示待測站。上標 g 代表參考衛星和 $h \in \{1, 2, \dots, s\}$ 為所餘的衛星；其地心地固三維直角坐標，皆視作給定。

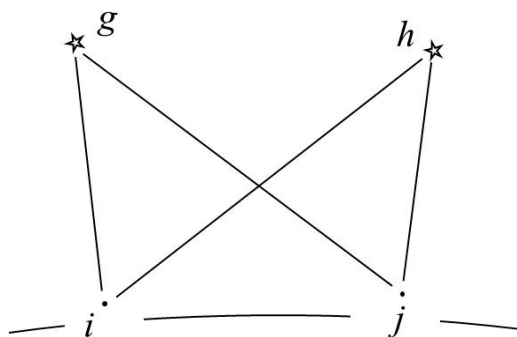


圖 5.2 二次差分

每一信號路徑上可收到精度不同的電碼虛擬距離(m)與載波相位(cycle)，後者經乘上波長 λ 能換成長度單位(Hofmann-Wellenhof et al. 1997)。以衛星 h 到站 j 為例，吾人有虛擬距離 $(P + vP)_j^h$ 與方差 $V(vP_j^h)$ ，和相位距離 $(L + vL)_j^h$ 與方差 $V(vL_j^h)$ 。常用的二次差分運算將觀測量組合成單一數量，或 $P_{ij}^{gh} = P_i^g - P_j^g - P_i^h + P_j^h$ 及 $L_{ij}^{gh} = L_i^g - L_j^g - L_i^h + L_j^h$ ，因此誘發線性組合矩陣。

利用第 j 站近似坐標加上改正量 $(\bar{X} + dX, \bar{Y} + dY, \bar{Z} + dZ)$ ，直線距離可展成，

$$R_i^g - R_j^g - R_i^h + R_j^h = \bar{R}_{ij}^{gh} + \left(\frac{X^g - \bar{X}_j}{\bar{R}_j^g} - \frac{X^h - \bar{X}_j}{\bar{R}_j^h} \right) dX_j + \left(\frac{Y^g - \bar{Y}_j}{\bar{R}_j^g} - \frac{Y^h - \bar{Y}_j}{\bar{R}_j^h} \right) dY_j + \left(\frac{Z^g - \bar{Z}_j}{\bar{R}_j^g} - \frac{Z^h - \bar{Z}_j}{\bar{R}_j^h} \right) dZ_j = \bar{R}_{ij}^{gh} + \frac{\partial \bar{R}_j^{gh}}{\partial X_j} dX_j + \frac{\partial \bar{R}_j^{gh}}{\partial Y_j} dY_j + \frac{\partial \bar{R}_j^{gh}}{\partial Z_j} dZ_j$$

$$dY_j + \frac{\partial \bar{R}_j^{gh}}{\partial Z_j} dZ_j = \bar{R}_{ij}^{gh} + d\bar{R}_j^{gh}。$$

將未知的變量寫在等號左邊，約化觀測量置於右側，遂得誤差方程組，

$$\begin{aligned} vP_{ij}^{gh} - d\bar{R}_j^{gh} &= \bar{R}_{ij}^{gh} - P_{ij}^{gh}, \\ vL_{ij}^{gh} - d\bar{R}_j^{gh} + \lambda N_{ij}^{gh} &= \bar{R}_{ij}^{gh} - L_{ij}^{gh}, \end{aligned} \quad (5.33)$$

此處新的 N (cycle) 為整數參數，上標 h 仍表示 s 顆衛星；單獨量測一筆數據時，式(5.33)有 $2s$ 個方程。為了排列矩陣中各元素，需定義自右乘的向量。總共有 $4(s+1)$ 距離量測，誤差向量是， $\mathbf{v} = (vP_i^g, vL_i^g, vP_j^g, vL_j^g, vP_i^1, vL_i^1, vP_j^1, vL_j^1, vP_i^2, vL_i^2, vP_j^2, vL_j^2, \dots, vP_i^s, vL_i^s, vP_j^s, vL_j^s)^T$ 。二次差分 $2s \times (4s+4)$ 矩陣 $\mathbf{B}$ 成為 ($\text{rank} \mathbf{B} = 2s$)，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}。$$

未知參數為坐標改正量和相位整數，計 $3+s$ 個， $\mathbf{x} = (dX_j, dY_j, dZ_j, N_{ij}^{g1}, N_{ij}^{g2}, \dots, N_{ij}^{gs})^T$ 。矩陣 $\mathbf{A}$ 有 $2s \times (3+s)$ 個元素 ($\text{rank} \mathbf{A} = 3+s$)，簡列於圖 5.3。約化觀測量或閉合差有 $2s$ 個， $\mathbf{l} = (\bar{R}_{ij}^{g1} - P_{ij}^{g1}, \bar{R}_{ij}^{g1} - L_{ij}^{g1}, \bar{R}_{ij}^{g2} - P_{ij}^{g2}, \bar{R}_{ij}^{g2} - L_{ij}^{g2}, \dots, \bar{R}_{ij}^{gs} - P_{ij}^{gs}, \bar{R}_{ij}^{gs} - L_{ij}^{gs})^T$ 。呈現函數模式暫告一段落。

隨機模式中尺度 σ_0^2 因子實有賴於其估計式(5.21)。先驗尺度化 $(4s+4) \times (4s+4)$ 協方差矩陣，礙於非對角線元素之知識缺乏，常可簡化為， $\mathbf{Q} = \text{diag}(V(vP_i^g), V(vL_i^g), V(vP_j^g), V(vL_j^g), V(vP_i^1), V(vL_i^1), V(vP_j^1), V(vL_j^1), V(vP_i^2), V(vL_i^2), V(vP_j^2), V(vL_j^2), \dots, V(vP_i^s), V(vL_i^s), V(vP_j^s), V(vL_j^s))$ 。在平差任務

裡， $(\mathbf{B}, \mathbf{Q}, \mathbf{A}, \mathbf{l})$ 是已知的，猶待求解 $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ ；其估計式(5.7 與 5.11)不再贅述。

$$\begin{pmatrix} \frac{-\partial \bar{R}_j^{g1}}{\partial X_j} & \frac{-\partial \bar{R}_j^{g1}}{\partial Y_j} & \frac{-\partial \bar{R}_j^{g1}}{\partial Z_j} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{-\partial \bar{R}_j^{g1}}{\partial X_j} & \frac{-\partial \bar{R}_j^{g1}}{\partial Y_j} & \frac{-\partial \bar{R}_j^{g1}}{\partial Z_j} & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \frac{-\partial \bar{R}_j^{g2}}{\partial X_j} & \frac{-\partial \bar{R}_j^{g2}}{\partial Y_j} & \frac{-\partial \bar{R}_j^{g2}}{\partial Z_j} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{-\partial \bar{R}_j^{g2}}{\partial X_j} & \frac{-\partial \bar{R}_j^{g2}}{\partial Y_j} & \frac{-\partial \bar{R}_j^{g2}}{\partial Z_j} & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{-\partial \bar{R}_j^{gs}}{\partial X_j} & \frac{-\partial \bar{R}_j^{gs}}{\partial Y_j} & \frac{-\partial \bar{R}_j^{gs}}{\partial Z_j} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{-\partial \bar{R}_j^{gs}}{\partial X_j} & \frac{-\partial \bar{R}_j^{gs}}{\partial Y_j} & \frac{-\partial \bar{R}_j^{gs}}{\partial Z_j} & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

圖 5.3 衛星導航單時刻定位設計矩陣

習題

5.1 混合模式平差根據函數模式 $\mathbf{B}\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{l}$ 和隨機模式 $\sigma_0^2 \mathbf{Q}$ ，

- (1) 試解釋模式內尺量、各向量與矩陣之意義。
- (2) $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{B}^T \mathbf{k}$ 中 $\mathbf{k}$ 向量表示何物，如何導來之？
- (3) 請證明二次形 $\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v}$ 之數學期望等於 σ_0^2 因子與自由度相乘。

5.2 對某冪等方陣而言，如何定義其正交補餘，並自行驗證之。

5.3 為何會有估計方差分量之需求？就單一方差因子與兩個以上方差分量案情，分別加以說明。

5.4 於整併約制式子時，幾乎千篇一律運用 Lagrange 乘子向量以執行內積。另一方面，固有值被用來約制範數為單位長度的固有向量。乘子即固有值或反之亦然，試問此觀點是否穿鑿附會？

六、雙方程組平差

一併處理兩組觀測屬性相異的誤差方程組常存在必要性。因應此需求而導出的代數結果，能藉其探索參數解之更新或受約制時估計式的特性，如虛擬觀測量所引進的權約制，和先後時間序列測量數據之逐次處理等。

6.1 逐次平差解

批次間接觀測平差法於近似值處線性化後，以迭代方式續得收斂解答。暫令方差尺度 $\sigma_0^2 = 1$ ，可得量測與參數間方程，

$$\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{l}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}; \quad (6.1)$$

此地呼應式(5.1)中矩陣 $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ 。照舊， $\mathbf{v}$ 為觀測殘差向量， $\mathbf{A}$ 是設計矩陣， $\mathbf{x}$ 向量含參數改正。 $\mathbf{l}$ 向量表示約化觀測量。權 $\mathbf{P}$ 矩陣為尺度化協方差 $\mathbf{Q}$ 矩陣(回顧定義式(5.6)， $\mathbf{Q}_l = \mathbf{BQB}^T = \mathbf{Q}$)之逆陣。當設計 $\mathbf{A}$ 矩陣無秩虧之虞且式(6.1)為超定的，最小二乘法之解，式(3.3)或(5.7)：

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{n}, \quad (6.2)$$

$$\mathbf{Q}_x = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{N}^{-1}. \quad (6.3)$$

倘若一先一後分塊、形成兩組觀測量，且設參數數目未變，按 Hofmann-Wellenhof et al. (1997)，

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{l} = \begin{pmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{l}_2 \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

僅以第一方程組觀測量先平差得初步解 $\mathbf{x}^*$ 時，

$$\mathbf{x}^* = (\mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{l}_1 = \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{n}_1, \quad (6.5)$$

$$\mathbf{Q}_{x^*} = (\mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1)^{-1} = \mathbf{N}_1^{-1}. \quad (6.6)$$

續假設該方程組間觀測量沒有統計的關聯，其權矩陣為分塊對角方陣，

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

整體的矩陣 $\mathbf{N}$ 和向量 $\mathbf{n}$ 能疊加成，

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_2 = \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2, \quad (6.8)$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{A}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{l}_1 + \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{l}_2 = \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2. \quad (6.9)$$

當初步解的更新為 $\Delta \mathbf{x}$ 向量，即 $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \Delta \mathbf{x}$ 時，則能演變， $(\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2)(\mathbf{x}^* + \Delta \mathbf{x}) = \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2$ ，或 $(\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2)\Delta \mathbf{x} = \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 - (\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2)\mathbf{x}^*$ 。根據式(6.5) $\mathbf{N}_1 \mathbf{x}^* = \mathbf{n}_1$ ，並將式(6.8)–(6.9)代入與進行結合後，

$$(\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2)\Delta \mathbf{x} = \mathbf{n}_2 - \mathbf{N}_2 \mathbf{x}^* = \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{l}_2 - \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_2 \mathbf{x}^* = \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 (\mathbf{l}_2 - \mathbf{A}_2 \mathbf{x}^*). \quad (6.10)$$

接著，

$$\Delta \mathbf{x} = (\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2)^{-1} \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 (\mathbf{l}_2 - \mathbf{A}_2 \mathbf{x}^*) = \mathbf{K} (\mathbf{l}_2 - \mathbf{A}_2 \mathbf{x}^*), \quad (6.11)$$

於此獲得矩陣 $\mathbf{K} = (\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2)^{-1} \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2$ ，此 $\mathbf{K}$ 為 Kalman 濾波增益矩陣，見 Gelb et al. (1974) 和 Brown & Hwang (1997)。留意式(6.11)內 $\mathbf{A}_2 \mathbf{x}^*$ 項，能詮釋為約化 $\mathbf{l}_2$ 觀測預估量。同時，初步協方差矩陣 $\mathbf{Q}_{x^*}$ 之增量 $\Delta \mathbf{Q}_x$ 得自於式(6.3)，

$$\mathbf{N} \mathbf{Q}_x = (\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2)(\mathbf{Q}_{x^*} + \Delta \mathbf{Q}_x) = \mathbf{I}. \quad (6.12)$$

經移項， $(\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2)\Delta \mathbf{Q}_x = \mathbf{I} - (\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2)\mathbf{Q}_{x^*} = -\mathbf{N}_2 \mathbf{Q}_{x^*}$ ，再經代換，

$$\Delta \mathbf{Q}_x = -(\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2)^{-1} \mathbf{N}_2 \mathbf{Q}_{x^*} = -(\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2)^{-1} \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_2 \mathbf{Q}_{x^*}, \quad (6.13)$$

此地負的增量為減量之意。用式(6.11)所定義的增益後，

$$\Delta \mathbf{Q}_x = -\mathbf{K} \mathbf{A}_2 \mathbf{Q}_{x^*}. \quad (6.14)$$

增益矩陣尚滿足下列的關係，

$$\mathbf{K} = (\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2)^{-1} \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 = \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{A}_2^T (\mathbf{P}_2^{-1} + \mathbf{A}_2 \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{A}_2^T)^{-1}. \quad (6.15)$$

利用測繪數學公式(詳於附錄 E)，

$$(\mathbf{Y} + \mathbf{UZV})^{-1} = \mathbf{Y}^{-1} - \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{U} (\mathbf{Z}^{-1} + \mathbf{VY}^{-1} \mathbf{U})^{-1} \mathbf{VY}^{-1}, \quad (6.16)$$

式(6.15)右側可藉結合與分配律約化成，

$$\begin{aligned} & \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{A}_2^T (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_2 (\mathbf{N}_1 + \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_2)^{-1} \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2) \\ &= \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 - \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_2 (\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2)^{-1} \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 \\ &= (\mathbf{N}_1^{-1} - \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{N}_2 (\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2)^{-1}) \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 \\ &= (\mathbf{N}_1^{-1} (\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2) (\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2)^{-1} - \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{N}_2 (\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2)^{-1}) \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 \\ &= (\mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{N}_2 - \mathbf{N}_1^{-1} \mathbf{N}_2) (\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2)^{-1} \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 \\ &= (\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2)^{-1} \mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2, \end{aligned} \quad (6.17)$$

間接得證式(6.15)。當 u 為未知參數個數，增益 $\mathbf{K}$ 矩陣(6.15)前段公式為 $u \times u$ 矩陣之求逆。以 n_2 表示第二組觀測量數目，則增益的後段公式表示 $n_2 \times n_2$ 矩陣之求逆。只要維度 $n_2 < u$ 時，後段公式佔演算優勢。

形式上以 $\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{x}$ 表示參數近似值及改正(或更新)，並以 $\mathbf{l}_x + \mathbf{v}_x$ 為該組參數先驗(預估或虛擬)觀測量及誤差，式(6.4)能採用 $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_x$ ， $\mathbf{A}_1 = \mathbf{I}$ 與

$\mathbf{l}_1 = \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{l}_x$ 代換式。逐次平差兩組數學模式即書成，

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 - \mathbf{x} &= \mathbf{l}_1, \quad \mathbf{P}_1; \\ \mathbf{v}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{x} &= \mathbf{l}_2, \quad \mathbf{P}_2.\end{aligned}\tag{6.18}$$

在迭代演算之初，可權宜地將參數 $\bar{\mathbf{x}}$ 近似逕視為逐次平差所需的 $\mathbf{l}_x$ 觀測。

6.2 最小約制

當 $n \times u$ 設計矩陣 $\mathbf{A}$ 和法方程組矩陣的秩 $\text{rank} \mathbf{A} = r < u < n$ 時，秩虧 $u - r$ 常源自坐標系統定義之不足。譬如三邊網形不受平移與旋轉參數的影響；三角網形更不受制於平移、旋轉及尺度；垂直平移則無法左右水準網形。

藉額外 $u - r$ 個參數條件得以補足秩虧。探討最小約制平差解的理由主要為觀測量之品質管制。進一步，內約制解優點在於誤差橢圓表達設計 $\mathbf{A}$ 與權 $\mathbf{P}$ 矩陣的幾何性。

參考式(6.4)，將之轉型為在秩虧情況下觀測平差模式，

$$\mathbf{v} + \mathbf{A} \mathbf{x}_b = \mathbf{l}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1};\tag{6.19}$$

$$\mathbf{B} \mathbf{x}_b = \mathbf{0}.\tag{6.20}$$

式(6.19)–(6.20)中 $u \times 1$ 參數 $\mathbf{x}_b$ 向量下標 b 表示參數解受制於 $(u - r) \times u$ 係數 $\mathbf{B}$ 矩陣所攜帶的特殊條件。對式(6.19)殘差二次形 $\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v}$ 極小化與經 Lagrange $\mathbf{k}_2$ 乘子整併式(6.20)後，Leick (2004)列出法方程組如下，

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_b \\ -\mathbf{k}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.\tag{6.21}$$

當 $\mathbf{B}$ 矩陣具備滿的列秩，且與 $\mathbf{A}$ 的列向量互為線性獨立時，式(6.21)的係

數矩陣是非奇異的。逆陣的一般式為，

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_b & \mathbf{S}^T \\ \mathbf{S} & \mathbf{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}. \quad (6.22)$$

子矩陣間恆等式為，

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q}_b + \mathbf{B}^T \mathbf{S} = \mathbf{I}_u, \quad (6.23)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{S}^T + \mathbf{B}^T \mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad (6.24)$$

$$\mathbf{B} \mathbf{Q}_b = \mathbf{0}, \quad (6.25)$$

$$\mathbf{B} \mathbf{S}^T = \mathbf{I}_{u-r}. \quad (6.26)$$

為求解之需，吾人能引進 $(u-r) \times u$ 矩陣 $\mathbf{E}$ ；尤其它的橫列張成設計 $\mathbf{A}$ 矩陣的零核空間。換言之存在著，

$$\mathbf{A} \mathbf{E}^T = \mathbf{0}, \quad (6.27)$$

或者， $(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{E}^T = \mathbf{0}$ 。依前述，矩陣 $\mathbf{B}$ 的橫列獨立於 $\mathbf{A}$ 的橫列，故 $(u-r) \times (u-r)$ 方陣 $\mathbf{B} \mathbf{E}^T$ 是可逆的。自左乘式(6.23)此 $\mathbf{E}$ 後能得，

$$\mathbf{S} = (\mathbf{B} \mathbf{E}^T)^{-1} \mathbf{E}, \quad (6.28)$$

其亦滿足式(6.26)， $\mathbf{B} \mathbf{S}^T = \mathbf{B} \mathbf{E}^T (\mathbf{B} \mathbf{E}^T)^{-1} = \mathbf{I}$ 。將 $\mathbf{S}$ 代入式(6.24)知 $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{E}^T (\mathbf{B} \mathbf{E}^T)^{-1} + \mathbf{B}^T \mathbf{R} = \mathbf{0}$ ，推得結果，

$$\mathbf{B}^T \mathbf{R} = \mathbf{0}. \quad (6.29)$$

鑑於滿秩的 $\mathbf{B}$ 矩陣(列與列或行與行間向量互為獨立)，必然地 $\mathbf{R}$ 為零矩陣。因此，

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_b & \mathbf{E}^T (\mathbf{B} \mathbf{E}^T)^{-1} \\ (\mathbf{E} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (6.30)$$

將式(6.28)代回式(6.23)，得非對稱矩陣：

$$\mathbf{T}_b = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q}_b = \mathbf{I}_u - \mathbf{B}^T (\mathbf{E} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{E}. \quad (6.31)$$

藉式(6.25)和(6.27)之助，吾人能用結合律修改式(6.31)為，

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{B}^T \mathbf{B})(\mathbf{Q}_b + \mathbf{E}^T (\mathbf{B} \mathbf{E}^T)^{-1} (\mathbf{E} \mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{E}) = \mathbf{I}_u; \quad (6.32)$$

用分配律可回推式(6.31)。對稱方陣 $\mathbf{Q}_b$ 獲自於式(6.32)，

$$\mathbf{Q}_b = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} - \mathbf{E}^T (\mathbf{E} \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{E}^T)^{-1} \mathbf{E}. \quad (6.33)$$

將之置回式(6.30)，即得分塊的逆陣。在約制式(6.20)條件下，將式(6.30)左乘式(6.21)兩側，參數 $\mathbf{x}_b$ 解答為，

$$\mathbf{x}_b = \mathbf{Q}_b \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}. \quad (6.34)$$

續以誤差傳播定律得參數(尺度化)協方差矩陣 $D(\mathbf{x}_b) = \mathbf{Q}_b \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{Q} \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q}_b$ ，即

$$\mathbf{Q}_b \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q}_b = \mathbf{Q}_b, \quad (6.35)$$

其證明為，以 $\mathbf{Q}_b$ 左乘式(6.31)，並借重式(6.25)。假如以 $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$ 右乘式(6.31)，並借重式(6.27)可得，

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q}_b \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}; \quad (6.36)$$

倘若等號兩邊同時右乘 $\mathbf{Q}_b$ ，則 $(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q}_b)^2 = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q}_b$ ，此矩陣為冪等方陣。若式(6.35)同時左乘 $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$ ，亦得同一冪等方陣，間接證明該式無誤。

欲解最小二乘問題，共需要額外 $u-r$ 個條件；換句話說，約制條件數正等於設計矩陣的秩虧。任何此類解答為一最小約制解。

假設有另一變通的條件組構成 $(u-r) \times u$ 滿列秩的係數 $\mathbf{C}$ 矩陣(且線性獨立於 $\mathbf{A}$ 的橫列)，

$$\mathbf{C}\mathbf{x}_c = \mathbf{0}, \quad (6.37)$$

矩陣 $\mathbf{C}$ 能逕取代 $\mathbf{B}$ ，而得類似的公式，

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{Q}_c \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}, \quad (6.38)$$

$$\mathbf{Q}_c = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} - \mathbf{E}^T (\mathbf{E} \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{E}^T)^{-1} \mathbf{E}, \quad (6.39)$$

$$\mathbf{T}_c = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q}_c = \mathbf{I}_u - \mathbf{C}^T (\mathbf{E} \mathbf{C}^T)^{-1} \mathbf{E}, \quad (6.40)$$

$$\mathbf{Q}_c \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q}_c = \mathbf{Q}_c, \quad (6.41)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q}_c \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}. \quad (6.42)$$

不同條件所約制出的解答皆有關聯。尤其，

$$\mathbf{x}_b = \mathbf{T}_b^T \mathbf{x}_c, \quad (6.43)$$

$$\mathbf{Q}_b = \mathbf{T}_b^T \mathbf{Q}_c \mathbf{T}_b, \quad (6.44)$$

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{T}_c^T \mathbf{x}_b, \quad (6.45)$$

$$\mathbf{Q}_c = \mathbf{T}_c^T \mathbf{Q}_b \mathbf{T}_c. \quad (6.46)$$

式(6.43)–(6.46)構成相異的最小約制平差參數解與協方差矩陣各自間之轉換。回顧式(6.27)，(6.31)和(6.40)，先驗證式(6.43)，

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_b^T \mathbf{x}_c &= \mathbf{T}_b^T \mathbf{Q}_c \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} = \mathbf{Q}_b \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q}_c \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} = \mathbf{Q}_b (\mathbf{I} - \mathbf{C}^T (\mathbf{E} \mathbf{C}^T)^{-1} \mathbf{E}) \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \\ &= \mathbf{Q}_b \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} = \mathbf{x}_b. \end{aligned}$$

再舉例證明式(6.46)。參考式(6.36)和(6.40)–(6.41)知，

$$\mathbf{T}_c^T \mathbf{Q}_b \mathbf{T}_c = \mathbf{Q}_c \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q}_b \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q}_c = \mathbf{Q}_c \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q}_c = \mathbf{Q}_c.$$

6.2.1 內約制平差

取代矩陣 $\mathbf{B}$ 所示的條件式(6.20)或 $\mathbf{C}$ 式(6.37)，吾人能選用 $(u-r) \times u$ 滿列秩的係數 $\mathbf{E}$ 矩陣以形成約制，式(6.27)明列 $\mathbf{A}$ 的橫列向量與 $\mathbf{E}$ 者之間是正交的，

$$\mathbf{E} \mathbf{x}_p = \mathbf{0}. \quad (6.47)$$

經符號 $\mathbf{E}$ 代替 $\mathbf{C}$ ，下標 p 代替 c ，內約制解答公式系列成為，

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{Q}_p \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}, \quad (6.48)$$

$$\mathbf{Q}_p = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{E}^T \mathbf{E})^{-1} - \mathbf{E}^T (\mathbf{E} \mathbf{E}^T \mathbf{E} \mathbf{E}^T)^{-1} \mathbf{E}, \quad (6.49)$$

$$\mathbf{T}_p = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q}_p = \mathbf{I}_u - \mathbf{E}^T (\mathbf{E} \mathbf{E}^T)^{-1} \mathbf{E}, \quad (6.50)$$

$$\mathbf{Q}_p \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q}_p = \mathbf{Q}_p, \quad (6.51)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q}_p \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}. \quad (6.52)$$

特別的內約制解與最小約制解間存在著，

$$\mathbf{x}_b = \mathbf{T}_b^T \mathbf{x}_p, \quad (6.53)$$

$$\mathbf{Q}_b = \mathbf{T}_b^T \mathbf{Q}_p \mathbf{T}_b, \quad (6.54)$$

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{T}_p^T \mathbf{x}_b, \quad (6.55)$$

$$\mathbf{Q}_p = \mathbf{T}_p^T \mathbf{Q}_b \mathbf{T}_p. \quad (6.56)$$

按式(6.50)，冪等方陣 $\mathbf{T}_p$ 是一對稱矩陣。式(6.48)–(6.49)的 $\mathbf{Q}_p$ 稱作廣義逆元，亦稱為法方程組係數矩陣之擬逆陣，常記成 $\mathbf{Q}_p = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^+$ ；可參考(D.10)或 Koch(1999)。既有開宗明義式(6.27)，式(6.49)代入(6.48)後能得到，

$$\mathbf{x}_p = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{E}^T \mathbf{E})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}. \quad (6.57)$$

同時，循式(3.5)程序復原尺度後，平差參數的協方差矩陣為 $\hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_p$ 。

於可能的最小約制解中，內約制解更最小化參數平方和(Leick 2004)。若干內約制估計的幾何詮釋：近似參數與平差 $\mathbf{x}_p$ 參數間相似轉換的平移及旋轉值會等於零。不受系統定義的影響，內約制求解坐標之誤差橢圓展現網形幾何。所有最小約制解答推出同樣的平差觀測量、後驗單位權方差、殘差協方差矩陣等。

6.2.2 網形平差

以平面三邊網形為例，計有 n 個控制測站。站 i 到 k 間，其中 $i, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ 與 $i \neq k$ ，水平距離(m)為 s_{ik} 。於平差線性方程組時，設計矩陣某橫列能書成， $(0 \dots \frac{-(y_k - y_i)}{s_{ik}} \quad \frac{-(x_k - x_i)}{s_{ik}} \dots 0 \dots \frac{y_k - y_i}{s_{ik}} \quad \frac{x_k - x_i}{s_{ik}} \dots 0)$ ，此處變量 y 及 x 分別表示縱橫坐標。藉直觀推斷，內約制 $3 \times 2n$ 矩陣為，

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 \dots 1 & 0 & \dots 0 \dots 1 & 0 & \dots 0 \\ 0 \dots 0 & 1 & \dots 0 \dots 0 & 1 & \dots 0 \\ 0 \dots -x_i & y_i & \dots 0 \dots -x_k & y_k & \dots 0 \end{pmatrix}. \quad (6.58)$$

此式的橫列線性獨立於設計矩陣各橫列；尤其第三個列向量內積等於，

$$\frac{1}{s_{ik}} (x_i(y_k - y_i) - y_i(x_k - x_i) - x_k(y_k - y_i) + y_k(x_k - x_i)) = 0, \text{ 亦表示兩者正交。}$$

內約制條件能補足三邊網平移與旋轉所致的秩虧。

以平面三角網形為例，全測儀設站於 j 點，角度(deg)從站 i 方向量到 k 方向，其中 $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ 與 $i \neq j \neq k$ 。夾角為方向間差分，故站 j 的角度

$$\text{為 } \tan^{-1} \left(\frac{x_k - x_j}{y_k - y_j} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{x_i - x_j}{y_i - y_j} \right)。 \text{按照微分式子 } d \tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} du, \text{ 於平}$$

差之際，對應的設計矩陣橫列能書成， $\left(\dots \frac{x_i - x_j}{s_{ji}^2} \quad \frac{-(y_i - y_j)}{s_{ji}^2} \quad \dots \right.$
 $\left. \left(\frac{x_k - x_j}{s_{jk}^2} - \frac{x_i - x_j}{s_{ji}^2} \right) \left(\frac{-(y_k - y_j)}{s_{jk}^2} + \frac{y_i - y_j}{s_{ji}^2} \right) \dots \frac{-(x_k - x_j)}{s_{jk}^2} \quad \frac{y_k - y_j}{s_{jk}^2} \quad \dots \right)$ 。

三角網平移、旋轉與尺度參數所引起的秩虧能獲得補償，憑下列的 $4 \times 2n$ 內約制條件，

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \dots & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 & \dots \\ \dots & -x_i & y_i & \dots & -x_j & y_j & \dots & -x_k & y_k & \dots \\ \dots & y_i & x_i & \dots & y_j & x_j & \dots & y_k & x_k & \dots \end{pmatrix}. \quad (6.59)$$

此式的橫列正交於設計矩陣通式橫列。譬如式(6.59)第四列與通式橫列內積等於， $\frac{1}{s_{ji}^2}(y_i(x_i - x_j) + x_i(-y_i + y_j) + y_j(-x_i + x_j) + x_j(y_i - y_j)) +$
 $\frac{1}{s_{jk}^2}(y_j(x_k - x_j) + x_j(-y_k + y_j) + y_k(-x_k + x_j) + x_k(y_k - y_j)) = 0$ 。

以水準網形為例，觀測量(m)期望值應代表高程差，或 $E(h_{ij}) = H_j - H_i$ ，其中指標 $i, j \in \{1, \dots, n\}$ 與 $i \neq j$ 。任一設計矩陣橫列僅含 $(\dots -1 \dots 1 \dots)$ 。擇定內約制 $1 \times n$ 陣列， $\mathbf{E} = (1 \ 1 \dots 1)$ 。由於列向量內積恆等於 $-1 + 1 = 0$ ，該內約制條件能補足水準網基準之不足。

習題

- 6.1 運用逐次最小二乘平差法之際，試論述如何求解第一階段未知參數 $\mathbf{x}^*$ 答案，和第二階段 $\Delta \mathbf{x}$ 參數的更新。
- 6.2 最小約制或內約制平差時所額外建立的條件，其數目是多少與目的又為何？並敘述內約制演算的策略及作法。

參考文獻

- Baarda W (1968) A testing procedure for use in geodetic networks. Publications on Geodesy 2(5), Netherlands Geodetic Commission, Delft
- Brown RG, Hwang PYC (1997) Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering, 3rd edn. Wiley, New York
- Cen M, Li Z, Ding X, Zhuo J (2003) Gross error diagnostics before least squares adjustment of observations. J Geod 77(9):503–513. doi:10.1007/s00190-003-0343-4
- Crocetto N, Gatti M, Russo P (2000) Simplified formulae for the BIQUE estimation of variance components in disjunctive observation groups. J Geod 74(6):447–457. doi:10.1007/s001900000109
- Darbeheshti N, Featherstone WE (2009) Non-stationary covariance function modelling in 2D least-squares collocation. J Geod 83(6):495–508. doi:10.1007/s00190-008-0267-0
- Felus YA (2004) Application of total least squares for spatial point process analysis. J Surv Eng 130(3):126–133. doi:10.1061/(ASCE)0733-9453(2004)130:3(126)
- Fischler MA, Bolles RC (1981) Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography. Communications ACM 24(6):381–395
- Gauss CF (1809) Theoria Motus Corporum Coelestium. Perthes und Besser,

Hamburg

Gelb A, Kasper JF, Nash RA, Price CF, Sutherland AA (1974) *Applied Optimal Estimation*. The Massachusetts Institute of Technology Press, Cambridge

Ghilani CD (2010) *Adjustment Computations*, 5th edn. Wiley, Hoboken

Gruen A, Akca D (2005) Least squares 3D surface and curve matching. *ISPRS J Photogramm Remote Sens* 59(3):151–174. doi:10.1016/j.isprsjprs.2005.02.006

Hellwich O, Ebner H (2000) Geocoding SAR interferograms by least squares adjustment. *ISPRS J Photogramm Remote Sens* 55(4):277–288

Hofmann-Wellenhof B, Lichtenegger H, Collins J (1997) *Global Positioning System Theory and Practice*, 4th edn. Springer, Wien

Koch KR (1999) *Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models*, 2nd edn. Springer, Berlin

Kotsakis C (2005) On the trade-off between model expansion, model shrinking, and parameter estimation accuracy in least-squares data analysis. *J Geod* 79(8):460–466. doi:10.1007/s00190-005-0479-5

Kuang D, Schutz BE, Watkins MM (1996) On the structure of geometric positioning information in GPS measurements. *J Geod* 71(1):35–43. doi:10.1007/s001900050073

Leick A (2004) *GPS Satellite Surveying*, 3rd edn. Wiley, Hoboken

- Mikhail EM (1976) Observations and Least Squares. University Press of America, Lanham
- Papoulis A (1990) Probability and Statistics. Prentice-Hall, Englewood Cliffs
- Schwarz CR, Kok JJ (1993) Blunder detection and data snooping in LS and robust adjustments. J Surv Eng 119(4):127–136
- Teunissen PJG (2003) Adjustment Theory. VSSD, Delft
- Usai S (2003) A least squares database approach for SAR interferometric data. IEEE Trans Geosci Remote Sens 41(4):753–760. doi:10.1109/TGRS.2003.810675
- Vennebusch M, Nothnagel A, Kutterer H (2009) Singular value decomposition and cluster analysis as regression diagnostics tools for geodetic applications. J Geod 83(9):877–891. doi:10.1007/s00190-009-0306-5
- Wang J, Stewart MP, Tsakiri M (1998) Stochastic modeling for static GPS baseline data processing. J Surv Eng 124(4):171–181
- Wolf PR, Dewitt BA (2000) Elements of Photogrammetry with Applications in GIS, 3rd edn. McGraw-Hill, Boston
- Wu J (2003) Idempotence and orthogonality in relation to mixed model adjustments. J Surv Eng 129(4):141–145. doi:10.1061/(ASCE)0733-9453(2003)129:4(141)

附錄、知其然與所以然

A 坐標之運算

採相對的觀點，測角與量距表示方向間差異，與端點間遠近。憑畢氏定理，距離(m)緊結著坐標(m)。藉三角函數，角度(deg)與坐標數據更密不可分。

A.1 餘弦函數與內積

餘弦定律源自畢氏定理(斜邊平方為股平方和)與等量公理。於三角形中，參圖 A.1 的左側，

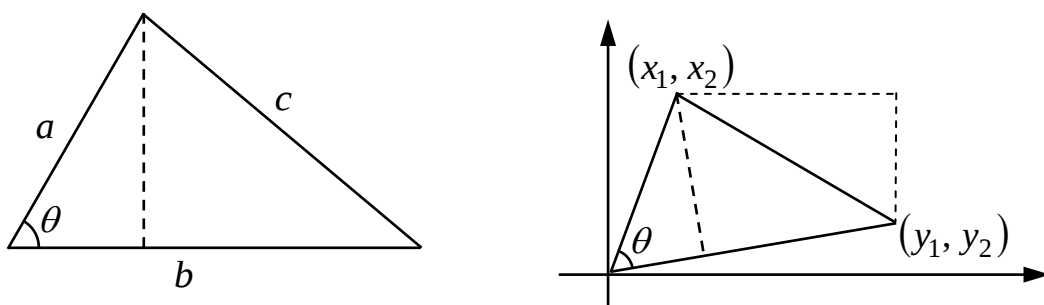


圖 A.1 平面(或斜面)三角形

經配方得證，

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta &= a^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + b^2 - 2ab \cos \theta \\ &= a^2 \sin^2 \theta + b^2 - 2b(a \cos \theta) + (a \cos \theta)^2 \\ &= (a \sin \theta)^2 + (b - a \cos \theta)^2 = c^2. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

將之應用於右側子圖時，平面直角坐標與邊長的平方關係分別為 $a^2 = x_1^2 + x_2^2$ ， $b^2 = y_1^2 + y_2^2$ ，和 $c^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$ 。

藉餘弦定律(A.1)知， $a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta = c^2 = x_1^2 + y_1^2 - 2x_1y_1 + x_2^2 + y_2^2 - 2x_2y_2 = a^2 + b^2 - 2(x_1y_1 + x_2y_2)$ 。因此，

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2} \cos \theta = x_1y_1 + x_2y_2, \quad (\text{A.2})$$

此處視等號右側為內積定義式。更多維向量的內積式子能順理成形，如 $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = |\mathbf{x}| |\mathbf{y}| \cos \theta = \sum_i x_i y_i$ 。

按題旨，長度 $|\mathbf{x}| \neq 0$ 和 $|\mathbf{y}| \neq 0$ ，同時除以它們後，

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{1}{|\mathbf{x}| |\mathbf{y}|} \sum x_i y_i = \frac{x_1}{|\mathbf{x}|} \frac{y_1}{|\mathbf{y}|} + \frac{x_2}{|\mathbf{x}|} \frac{y_2}{|\mathbf{y}|} + \dots \\ &= \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \cos \alpha_2 \cos \beta_2 + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

換言之，超平面角 θ 之餘弦能分解為方向餘弦向量的內積。

A.2 行列式與面積

平面直角坐標系兩個點位在 (a, b) 和 (c, d) ，且於原點的頂角為 θ 。記成

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 時，得二階行列式 $ad - bc$ 。取其平方後，藉等量公理與內積(A.2)能

轉變，

$$\begin{aligned} (ad - bc)^2 &= a^2 d^2 - 2adbc + b^2 c^2 \\ &= a^2 d^2 + a^2 c^2 - a^2 c^2 - 2acbd - b^2 d^2 + b^2 d^2 + b^2 c^2 \\ &= a^2 (c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 + b^2 (c^2 + d^2) \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2} \cos \theta)^2 \\ &= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)(1 - \cos^2 \theta) = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

再取式(A.4)的平方根知， $\pm(ad - bc) = \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2} \sin \theta$ 。換句話說，行列式絕對值會等於從原點到該兩點為鄰邊的平行四邊形面積。

採 Gauss 平面和複數的極式，Euler 公式(B.1)亦可表示兩點，

$$a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) = \sqrt{a^2 + b^2} e^{i\theta_1}, \quad (\text{A.5})$$

$$c + di = \sqrt{c^2 + d^2} (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = \sqrt{c^2 + d^2} e^{i\theta_2}, \quad (\text{A.6})$$

此地 i 係指 $\sqrt{-1}$ 。為得到輻角(rad)差異 $\theta = \theta_2 - \theta_1$ ，將複數與另者的共軛複數相乘如下，

$$\begin{aligned} (c + di)(a - bi) &= \sqrt{c^2 + d^2} \sqrt{a^2 + b^2} e^{i\theta_2} e^{-i\theta_1} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2} e^{i(\theta_2 - \theta_1)} = \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2} e^{i\theta} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2} (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= ac + bd + (ad - bc)i. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

式(A.7)等號左右邊實部等於實部 $\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2} \cos \theta = ac + bd$ ，為內積定義之始；虛部與虛部全等，得知 $\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2} \sin \theta = ad - bc$ ，或平行四邊形面積即為行列式。

三維斜平面中平行四邊形面積會等於以行列式為元素之向量長。將坐標原點暫移到頂點，並用帶數字下標的元素，兩個相鄰邊之向量可設為 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$ 和 $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$ 。若向量間夾角為 θ 時，平行四邊形面積藉分配與結合律，代數運算如下，

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta &= |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| (1 - \cos^2 \theta)^{1/2} \\ &= (|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta)^2)^{1/2} \\ &= ((a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ((a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2)^{1/2} \\
&= \sqrt{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2}.
\end{aligned} \tag{A.8}$$

今定義 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ 又積右手則代表此向量，或順序適應的 $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ ，此處坐標

軸單位向量分別是 $\mathbf{i} = (1, 0, 0)^T$ ， $\mathbf{j} = (0, 1, 0)^T$ 及 $\mathbf{k} = (0, 0, 1)^T$ 。長度 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ 為斜面平行四邊形面積；此外由於內積代數為零， $\mathbf{a}^T (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) - a_2(a_1b_3 - a_3b_1) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$ 及 $\mathbf{b}^T (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$ ，又積向量為該斜面的法向量。

倘若 $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)^T$ 與法向量夾角等於 $\alpha (\neq \pi/2)$ ，則平行六面體體積為 $\mathbf{c}^T (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = |\mathbf{c}| |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cos \alpha$ 。欲廣義化此理，並以對稱方陣為論述的對象時，式(D.7)能表達超平行體體積之驗證。

B 趣味式子

公認 Euler 最喜歡的公式(i 為虛數單位)，

$$e^{i\pi} + 1 = \cos \pi + i \sin \pi + 1 = -1 + 0i + 1 = 0. \tag{B.1}$$

為何常態分布函數反曲點位於期望值加減標準差處？式子的推導靠微分。Gauss 機率密度函數為 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ ，於此符號 μ 為單變量 $-\infty < x < \infty$ 的期望值， σ 表示標準差。接著，

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{-(x-\mu)}{\sigma^2}, \tag{B.2}$$

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \left(\frac{-(x-\mu)}{\sigma^2} \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{-1}{\sigma^2}. \quad (\text{B.3})$$

按式(B.3)等於零條件定義反曲點。經結合律之用， $\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^2} = 0$ 或 $(x-\mu)^2 = \sigma^2$ ，即

$$x = \mu \pm \sigma. \quad (\text{B.4})$$

差分兩個變量允許以下的運算詮釋。設該量， $\partial_i i$ 與 $\partial_j j$ ，分別由係數乘以參數而得。通常線性化函數後，係數表示偏導數，參數為微量。採用相加與相減代換式子， $\xi = \frac{1}{2}(i+j)$ 與 $\zeta = \frac{1}{2}(i-j)$ ，逆向代換是， $i = \xi + \zeta$ 與 $j = \xi - \zeta$ 。藉分配及結合律，變量間差分結果為，

$$\partial_i i - \partial_j j = (\partial_i - \partial_j)\xi + (\partial_i + \partial_j)\zeta. \quad (\text{B.5})$$

如果 i 與 j 表示雷同的系統偏差時， $\xi \approx i$ 且 $\zeta \approx 0$ ，式(B.5)的係數 $\partial_i - \partial_j$ 會有抵銷效果。一旦 ∂_i 與 ∂_j 表示雷同的微商係數時， $\partial_i + \partial_j \approx 2\partial_i$ ，式(B.5)簡約成 $\partial_i(i-j)$ ，僅存 $i-j$ 差異為待估計參數。

C 觀點與演算法

除了內積詮釋矩陣乘法，

$$\underset{m,n}{\mathbf{C}} = \underset{m,r}{\mathbf{A}} \underset{r,n}{\mathbf{B}}, \quad (\text{C.1})$$

於此元素 $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ir}b_{rj}$ ， $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ 和 $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ 之外，亦可藉外積詮釋乘法，

$$\mathbf{C} = \sum_{k=1}^r \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k^T, \quad (\text{C.2})$$

此地 $m \times 1$ 向量 $\mathbf{a}_k$ 為矩陣 $\mathbf{A}$ 的行向量， $1 \times n$ $\mathbf{b}_k^T$ 為 $\mathbf{B}$ 的列向量。因為 $\mathbf{C}$ 代表式(C.1)與(C.2)等號的左側，等號右側的運算結果，自然殊途同歸。

用 Cholesky 法求逆陣時，先將對稱係數矩陣 $\mathbf{N}$ 分解為三角矩陣 $\mathbf{C}$ 之積： $\mathbf{N} = \mathbf{C}^T \mathbf{C}$ ；橫列由上往下，各列內，由左往右： $n_{ik} = \mathbf{c}_i^T \mathbf{c}_k$ 。由 $\mathbf{N} = \mathbf{C}^T \mathbf{C}$ 知， $\mathbf{N}^{-1} = \mathbf{Q} = \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{C}^T)^{-1}$ ；等號左右邊再同時前乘 $\mathbf{C}$ ，即是求逆陣的計算公式：

$$\mathbf{CQ} = (\mathbf{C}^T)^{-1}, \quad (\text{C.3})$$

其中 $(\mathbf{C}^T)^{-1}$ 是下三角矩陣；對角線元素各別是原 $\mathbf{C}$ 矩陣對角線元素的倒數。計算逆陣 $\mathbf{Q}$ 時的順序是：縱行方式由右往左，各行裡由下往上。

正交變換能使方陣的行向量互相垂直；Gram-Schmidt 正交化更使變換前後， $g \times g$ 矩陣 $\mathbf{G}$ 與 $\overline{\mathbf{G}}$ ，行列式不變或 $|\overline{\mathbf{G}}| = |\mathbf{G}|$ ，或超平行體的體積守恆。為建立方程，需額外考慮 $\mathbf{F}$ 方陣： $\overline{\mathbf{G}} = \mathbf{GF}$ 或者 $\mathbf{F}\overline{\mathbf{G}}^{-1} = \mathbf{G}^{-1}$ 。續按等量公理，

$$\mathbf{F}\overline{\mathbf{G}}^{-1}\mathbf{G} = \mathbf{I}_g. \quad (\text{C.4})$$

形式上鑑於 $\mathbf{FF}^{-1} = \mathbf{I}_g$ ，故 $\mathbf{F}^{-1} = \overline{\mathbf{G}}^{-1}\mathbf{G}$ 成立；且 $\mathbf{G}^{-1}\overline{\mathbf{G}}\overline{\mathbf{G}}^{-1}\mathbf{G} = \mathbf{I}_g$ ，故讀出

$\mathbf{F} = \mathbf{G}^{-1}\overline{\mathbf{G}}$ 式子。取兩邊的行列式之際， $|\mathbf{F}| = |\mathbf{G}^{-1}\overline{\mathbf{G}}| = |\mathbf{G}^{-1}| |\overline{\mathbf{G}}| = |\mathbf{G}|^{-1} |\overline{\mathbf{G}}| = |\mathbf{G}|^{-1} |\mathbf{G}| = 1$ 。一旦四捨五入 $\mathbf{F}$ 的元素後，可稱之為么模方陣。

D 乘子與固有值

設有對稱的 $n \times n$ 方陣 $\mathbf{Q}$ ，當受到單位長度 $\mathbf{r}$ 向量之約制時，二次形 $\mathbf{r}^T \mathbf{Q} \mathbf{r}$ 的極值終將顯示什麼？用 Lagrange 乘子 λ ，列出目標函數： $\mathbf{r}^T \mathbf{Q} \mathbf{r} -$

$\lambda(\mathbf{r}^T \mathbf{r} - 1)$ 。極值尺量對向量偏微分必須為零，故得到 $2\mathbf{Q}\mathbf{r} - 2\lambda\mathbf{r} = \mathbf{0}$ ，或者結合後 $(\mathbf{Q} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{r} = \mathbf{0}$ ，或

$$\mathbf{Q}\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r}. \quad (\text{D.1})$$

既然按題旨 $\mathbf{r}$ 為非零向量，方陣 $\mathbf{Q} - \lambda\mathbf{I}_n$ 內縱行向量是線性相依的，行列式條件必然成立， $|\mathbf{Q} - \lambda\mathbf{I}| = 0$ 。經展開能得 λ 變數 n 階多項式。此式 n 個實數根為 λ 解答，以固有值稱之。將固有值代回式(D.1)，可求解對應的固有向量，即 $\mathbf{Q}\mathbf{r}_i = \lambda_i\mathbf{r}_i$ ， $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ 。

倘若兩個固有值不等， $\lambda_i \neq \lambda_j$ ，則固有向量 $\mathbf{r}_i$ 一定正交於 $\mathbf{r}_j$ 。依等量公理演算雙線性形，

$$\mathbf{r}_i^T \mathbf{Q}\mathbf{r}_j = \lambda_j \mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_j = \lambda_j \mathbf{r}_j^T \mathbf{r}_i, \quad (\text{D.2a})$$

$$\mathbf{r}_j^T \mathbf{Q}\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i^T \mathbf{Q}^T \mathbf{r}_j = \lambda_i \mathbf{r}_j^T \mathbf{r}_i. \quad (\text{D.2b})$$

式(D.2b)減去(D.2a)，得 $(\lambda_i - \lambda_j)\mathbf{r}_j^T \mathbf{r}_i = 0$ 。按題旨 $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$ ，故 $\mathbf{r}_j^T \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i^T \mathbf{r}_j = 0$ ；每兩個不同的固有向量互相垂直。

D.1 正交方陣

以固有值組成對角方陣， $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ ，將對應的固有向量排列成方陣， $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \dots \mathbf{r}_n)$ ，式(D.1)形成，

$$\mathbf{Q}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}. \quad (\text{D.3})$$

矩陣 $\mathbf{R}$ 的特殊性在於 $\mathbf{R}^T \mathbf{R}$ 乘積，

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_1^T \\ \mathbf{r}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n^T \end{pmatrix} (\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \dots \mathbf{r}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_2 & \dots & \mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_n \\ \mathbf{r}_2^T \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_2^T \mathbf{r}_2 & \dots & \mathbf{r}_2^T \mathbf{r}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{r}_n^T \mathbf{r}_1 & \mathbf{r}_n^T \mathbf{r}_2 & \dots & \mathbf{r}_n^T \mathbf{r}_n \end{pmatrix} = \mathbf{I}_n. \quad (\text{D.4})$$

從定義知， $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R} = \mathbf{I}_n = \mathbf{R}^T\mathbf{R}$ ，即 $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ ，為所謂的正交方陣。由於行列式 $|\mathbf{R}^T\mathbf{R}| = |\mathbf{R}^T||\mathbf{R}| = |\mathbf{R}|^2 = 1$ ，所以行列式 $|\mathbf{R}| = \pm 1$ 。參考式(D.3)，原 $\mathbf{Q}$ 方陣能分解成，

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{R}^T = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i^T, \quad (\text{D.5})$$

已比照式(C.2)；另亦視察出原 $\mathbf{Q}$ 的跡與行列式各別為，

$$\text{tr}\mathbf{Q} = \text{tr}(\mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{R}^T) = \text{tr}\mathbf{\Lambda}, \quad (\text{D.6})$$

$$|\mathbf{Q}| = |\mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{R}^T| = |\mathbf{R}||\mathbf{\Lambda}||\mathbf{R}^T| = |\mathbf{\Lambda}|. \quad (\text{D.7})$$

取式(D.5)左右邊的逆陣遂得，

$$\mathbf{Q}^{-1} = (\mathbf{R}^T)^{-1} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R} \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{R}^T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i^T, \quad (\text{D.8})$$

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}^{-1}, \quad (\text{D.9})$$

可推理知，逆陣的固有值是原方陣者的倒數。此外， $\mathbf{Q}$ 與 $\mathbf{Q}^{-1}$ 有相同的固有向量。當秩 $\text{rank}\mathbf{Q} = r < n$ 之際，擬逆陣成為：

$$\mathbf{Q}^+ = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i^T, \quad (\text{D.10})$$

見 Vennebusch et al. (2009)。

D.2 誤差橢圓

按 Koch (1999) 假設檢定之理論，附加平面坐標與協方差的約制時，觀測殘差二次形變化相較於原二次形為 Fisher 變量，

$$\frac{1}{2\hat{\sigma}_0^2} \mathbf{y}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{y} \sim F_{2,n-r}, \quad (\text{D.11})$$

於此後驗方差為 $\hat{\sigma}_0^2$ ，點位在 $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$ ，尺度化協方差矩陣 $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}$ ，數量 $n-r$ 表示自由度。一旦給定顯著水準 α 機率，點位週遭的信賴區域能書成，

$$P\left(\frac{\mathbf{y}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{y}}{2\hat{\sigma}_0^2} \leq F_{2,n-r,\alpha}\right) = 1 - \alpha. \quad (\text{D.12})$$

經 $\mathbf{R}^T$ 左乘式(D.9)知 $\mathbf{R}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{R} = \mathbf{R}^T \mathbf{R} \Lambda^{-1} = \Lambda^{-1}$ ，進而定義變換 $\mathbf{z} = \mathbf{R}^T \mathbf{y}$ 與逆變換 $\mathbf{y} = \mathbf{R} \mathbf{z}$ 。由於 $\mathbf{y}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{y} = \mathbf{z}^T \mathbf{R}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{z} = \mathbf{z}^T \Lambda^{-1} \mathbf{z}$ ，遂得橢圓方程表達式(Leick 2004)，

$$P\left(\frac{z_1^2}{2\hat{\sigma}_0^2 \lambda_1 F_{2,n-r,\alpha}} + \frac{z_2^2}{2\hat{\sigma}_0^2 \lambda_2 F_{2,n-r,\alpha}} \leq 1\right) = 1 - \alpha, \quad (\text{D.13})$$

取 $F_{2,n-r,\alpha} = \frac{1}{2}$ 為準，信賴區域代表所謂的誤差橢圓，即 $\frac{z_1^2}{(\hat{\sigma}_0 \sqrt{\lambda_1})^2} +$

$\frac{z_2^2}{(\hat{\sigma}_0 \sqrt{\lambda_2})^2} \leq 1$ ，參圖 D.1 左側。

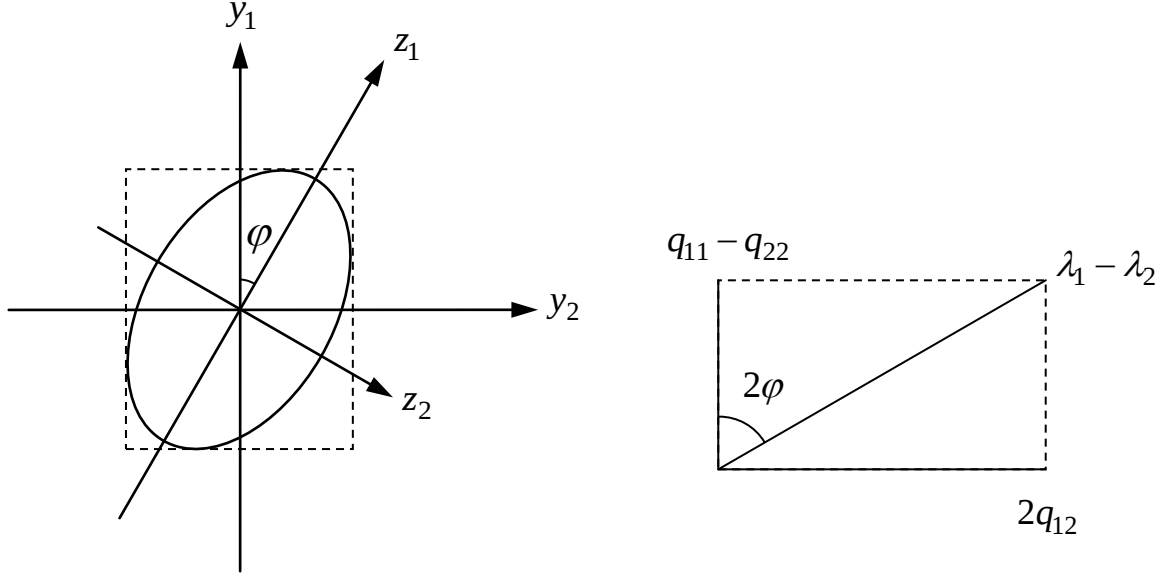


圖 D.1 誤差橢圓的半長軸與半短軸(左)；方差及協方差抵換為固有值與旋轉角(右)

統計方差 q_{11} , q_{22} 及協方差 $q_{12}(=q_{21})$, 和半長軸 $\hat{\sigma}_0\sqrt{\lambda_1}$ 、半短軸 $\hat{\sigma}_0\sqrt{\lambda_2}$ 及旋轉角 φ 間之幾何，會用到式(D.5)。倘若透過逆鐘向為正的旋轉， $z_1 = y_1 \cos \varphi + y_2 \sin \varphi$ 與 $z_2 = -y_1 \sin \varphi + y_2 \cos \varphi$ ，並代入 $\mathbf{y}^T \mathbf{Q} \mathbf{y} = \mathbf{z}^T \mathbf{R}^T \mathbf{Q} \mathbf{R} \mathbf{z} = \mathbf{z}^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{z}$ ，或 $(y_1 \ y_2) \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = \lambda_1 (y_1 \cos \varphi + y_2 \sin \varphi)^2 + \lambda_2 (-y_1 \sin \varphi + y_2 \cos \varphi)^2$ 即，

$$\begin{aligned} y_2^2 q_{22} + y_1^2 q_{11} + y_1 y_2 2q_{12} &= y_2^2 (\lambda_1 \sin^2 \varphi + \lambda_2 \cos^2 \varphi) \\ &+ y_1^2 (\lambda_1 \cos^2 \varphi + \lambda_2 \sin^2 \varphi) + y_1 y_2 2(\lambda_1 - \lambda_2) \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

藉比對交叉項係數得 $(\lambda_1 - \lambda_2) \sin 2\varphi = 2q_{12}$ 。故

$$\begin{aligned} \sin 2\varphi &= \frac{2q_{12}}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ \cos 2\varphi &= (1 - \sin^2 2\varphi)^{1/2} = \frac{((\lambda_1 - \lambda_2)^2 - 4q_{12}^2)^{1/2}}{\lambda_1 - \lambda_2}. \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

另按定義(D.1), $\begin{vmatrix} q_{11}-\lambda & q_{12} \\ q_{21} & q_{22}-\lambda \end{vmatrix} = (q_{11}-\lambda)(q_{22}-\lambda) - q_{12}^2 = \lambda^2 - (q_{11}+q_{22})\lambda + q_{11}q_{22} - q_{12}^2 = 0$, 一元二次方程式的根為 ,

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{q_{11}+q_{22}}{2} + \frac{w}{2}, \\ \lambda_2 &= \frac{q_{11}+q_{22}}{2} - \frac{w}{2}, \\ w &= ((q_{11}-q_{22})^2 + 4q_{12}^2)^{1/2}.\end{aligned}\tag{D.16}$$

此外, 相加相減算得 $\lambda_1 + \lambda_2 = q_{11} + q_{22}$, 為式(D.6)之用 ; 且 $\lambda_1 - \lambda_2 = w$, 將之代入式(D.15), 正弦除上餘弦得正切函數 ,

$$\tan 2\varphi = \frac{2q_{12}}{q_{11}-q_{22}},\tag{D.17}$$

方差與協方差可詮釋為橢圓圖形, 見圖 D.1(右)。由 $2q_{12}$ 分子與 $q_{11}-q_{12}$ 分母之正負決定 2φ 角度(rad)的象限。橢圓具對稱性, 以致 $0 < \varphi \leq \pi$ 。

E 逆陣公式

按分塊法求解法方程組係數矩陣 $\mathbf{N}$ 之逆方陣 ,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{12}^T & \mathbf{Q}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{N}_{11} & \mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{N}_{12}^T & \mathbf{N}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}.\tag{E.1}$$

依乘法規則得 $\mathbf{Q}_{11}\mathbf{N}_{12} + \mathbf{Q}_{12}\mathbf{N}_{22} = \mathbf{0}$, 靠等量公理知 $\mathbf{Q}_{12} = -\mathbf{Q}_{11}\mathbf{N}_{12}\mathbf{N}_{22}^{-1}$ 。類似地, 相乘和代換得 $\mathbf{Q}_{11}\mathbf{N}_{11} + \mathbf{Q}_{12}\mathbf{N}_{12}^T = \mathbf{I} = \mathbf{Q}_{11}(\mathbf{N}_{11} - \mathbf{N}_{12}\mathbf{N}_{22}^{-1}\mathbf{N}_{12}^T)$, 而解出 ,

$$\mathbf{Q}_{11} = (\mathbf{N}_{11} - \mathbf{N}_{12}\mathbf{N}_{22}^{-1}\mathbf{N}_{12}^T)^{-1}.\tag{E.2}$$

同理但略繁複些可得 $\mathbf{Q}_{12}^T \mathbf{N}_{11} + \mathbf{Q}_{22} \mathbf{N}_{12}^T = \mathbf{0}$ ，靠等量公理知 $\mathbf{Q}_{12}^T = -\mathbf{Q}_{22} \mathbf{N}_{12}^T \mathbf{N}_{11}^{-1}$ 。

經新一回相乘和代換得 $\mathbf{Q}_{12}^T \mathbf{N}_{12} + \mathbf{Q}_{22} \mathbf{N}_{22} = \mathbf{I} = \mathbf{Q}_{22} (\mathbf{N}_{22} - \mathbf{N}_{12}^T \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{N}_{12})$ 。
續得 $\mathbf{Q}_{22} = (\mathbf{N}_{22} - \mathbf{N}_{12}^T \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{N}_{12})^{-1}$ 。將之代回前式知 $\mathbf{Q}_{12}^T = -(\mathbf{N}_{22} - \mathbf{N}_{12}^T \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{N}_{12})^{-1} \mathbf{N}_{12}^T \mathbf{N}_{11}^{-1}$ 。從 $\mathbf{Q}_{11} \mathbf{N}_{11} + \mathbf{Q}_{12} \mathbf{N}_{12}^T = \mathbf{I}$ ，或 $\mathbf{Q}_{11} = \mathbf{N}_{11}^{-1} - \mathbf{Q}_{12} \mathbf{N}_{12}^T \mathbf{N}_{11}^{-1}$ ，先轉置再代入 $\mathbf{Q}_{12}$ 後終得，

$$\mathbf{Q}_{11} = \mathbf{N}_{11}^{-1} + \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{N}_{12} (\mathbf{N}_{22} - \mathbf{N}_{12}^T \mathbf{N}_{11}^{-1} \mathbf{N}_{12})^{-1} \mathbf{N}_{12}^T \mathbf{N}_{11}^{-1}. \quad (\text{E.3})$$

式(E.2)與(E.3)左側均代表 $\mathbf{Q}_{11}$ ，所以右側為逆方陣恆等式。當變更記號 $\mathbf{Y} = \mathbf{N}_{11}$, $\mathbf{U} = \mathbf{N}_{12}$, $\mathbf{Z} = \mathbf{N}_{22}^{-1}$ 與 $\mathbf{V} = \mathbf{N}_{12}^T$ 之後，分塊逆陣公式成，

$$(\mathbf{Y} - \mathbf{UZV})^{-1} = \mathbf{Y}^{-1} + \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{U} (\mathbf{Z}^{-1} - \mathbf{VY}^{-1} \mathbf{U})^{-1} \mathbf{VY}^{-1}, \quad (\text{E.4})$$

同時亦為證明。

F 習題簡答

趁習作之際，可提綱挈領。藉練習考古試題會有熟能生巧的效果。

2.1 $((\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1})^T = ((\mathbf{C}^T \mathbf{C})^T)^{-1} = (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1}$ ，故對稱性存在。

2.2 (1)每對角元素乘上行向量。(2)對角元素乘以對應的列向量。(3)
 $(\mathbf{DA})\mathbf{A}^{-1}\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{I}$ 。

2.3 $u = x \cos \theta + y \sin \theta$, $v = -x \sin \theta + y \cos \theta$ 。

2.4 (1) $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = x_1^2 + \dots + x_n^2$ 。

$$(2) \mathbf{xx}^T = \begin{pmatrix} x_1 x_1 & \dots & x_1 x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n x_1 & \dots & x_n x_n \end{pmatrix}.$$

$$(3) \operatorname{tr}(\mathbf{x}^T \mathbf{x}) = \operatorname{tr}(\mathbf{x} \mathbf{x}^T) = \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

$$2.5 \text{ 按誤差傳播, } \sigma_{\bar{z}}^2 = \left(\frac{1}{n} \dots \frac{1}{n} \right) \sigma^2 \mathbf{I} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{n}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \\ n \end{pmatrix} = \sigma^2 \frac{n}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}. \text{ 取平方根, 得證。}$$

3.1 透過誤差傳播, $\mathbf{Q}_x = \mathbf{Q}_x \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}_x$ 。而 $\mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{Q}_x$ 必須是單位方陣, 所以 $\mathbf{Q}_x = (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A})^{-1}$ 。

$$3.2 (1) \text{ 行列式等於 } \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} = 1.$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \mathbf{I}.$$

$$3.3 \ E(\hat{\sigma}_0^2) = \frac{E(\mathbf{v}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v})}{n-u} = \frac{\sigma_0^2(n-u)}{n-u} = \sigma_0^2, \text{ 故名之不偏估計。}$$

$$3.4 (1) r = \sqrt{(X_Q - X_P)^2 + (Y_Q - Y_P)^2}. (2) \frac{\partial r}{\partial Y_Q} = \frac{Y_Q - Y_P}{r}.$$

$$(3) \alpha = \tan^{-1} \left(\frac{X_Q - X_P}{Y_Q - Y_P} \right). (4) \frac{\partial \alpha}{\partial Y_Q} = \frac{-(X_Q - X_P)}{r^2}.$$

3.5 設 $X_0 = \bar{X}_0 + dX_0$, $Y_0 = \bar{Y}_0 + dY_0$, $t = \bar{t} + dt$ 和 $\theta = \bar{\theta} + d\theta$ 成立, 經線性化程序, $vX - dX_0 - (x \cos \bar{\theta} + y \sin \bar{\theta})dt - \bar{t}(-x \sin \bar{\theta} + y \cos \bar{\theta})d\theta = -X + \bar{X}_0 + \bar{t} \cos \bar{\theta}x + \bar{t} \sin \bar{\theta}y$, $vY - dY_0 - (-x \sin \bar{\theta} + y \cos \bar{\theta})dt - \bar{t}(-x \cos \bar{\theta} - y \sin \bar{\theta})d\theta = -Y + \bar{Y}_0 - \bar{t} \sin \bar{\theta}x + \bar{t} \cos \bar{\theta}y$ 。

4.1 $2n\pi - (n-2)\pi = (n+2)\pi$.

4.2 正弦定律為 $a \sin \beta = b \sin \alpha$, $b \sin \gamma = c \sin \beta$ 與 $a \sin \gamma = c \sin \alpha$, 僅有兩個獨立的邊角條件。設 $\mathbf{v} = (\varepsilon_a, \varepsilon_\alpha, \varepsilon_b, \varepsilon_\beta, \varepsilon_c, \varepsilon_\gamma)^T$, 則 2×6 係數 $\mathbf{B}$ 矩陣是
$$\begin{pmatrix} \sin \beta & -b \cos \alpha & -\sin \alpha & a \cos \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \gamma & -c \cos \beta & -\sin \beta & b \cos \gamma \end{pmatrix}.$$

4.3 令 $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11})^T$, 水準圈閉合條件使然, 存在著 $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 和 $\mathbf{l} = (-(h_1 + h_2 + h_3 + h_4) + v_{10} + h_{11}, -(h_5 + h_6 + h_7 + h_8 + h_9 + h_{10} + h_{11}))^T$, 與 $\sigma_0^2 \mathbf{Q} = \mathbf{I}$ 。啟動公式引擎, 估得 $\mathbf{v}$ 與 σ_0^2 。

4.4 當依序編號, 視 2nd, 3rd, 4th 式子是獨立的, 則 1st 為 2nd 加 4th 式; 5th 等於 1st 減 3rd 式。

5.1 (1) 尺量 σ_0^2 為量測協方差 $\sigma_0^2 \mathbf{Q}$ 矩陣的尺度。向量 $\mathbf{v}$ 表示觀測量殘差, 組合 $\mathbf{B}$ 矩陣含 $\mathbf{v}$ 之內積係數。向量 $\mathbf{x}$ 是待求的參數, 設計 $\mathbf{A}$ 矩陣含 $\mathbf{x}$ 之內積係數。向量 $\mathbf{l}$ 存約化觀測量。

(2) 向量 $\mathbf{k}$ 含關聯性乘子, 見(5.3)導來式。

(3) 參考式(5.17)到(5.21)。

5.2 定義 $\mathbf{I} - \mathbf{R}$ 為正交補餘; $(\mathbf{I} - \mathbf{R})(\mathbf{I} - \mathbf{R}) = \mathbf{I} - \mathbf{R}$ 仍在。

5.3 例如, 測角方差因子不必然是測距者。

5.4 趁存在著極大或極小值條件, 藉 Lagrange 乘子能考慮額外的約制。乘子即固有值是充要的。

6.1 見式(6.5)及(6.6)解答; 參考式(6.11)及(6.14)。

6.2 條件數目為秩虧數目。接著的平差演算雷同於秩足的方程組。

索引

一至五劃

二次形(Quadratic form) 6, 13, 28, 35, 38, 48, 63

二次差分(Double difference) 41

三角矩陣(Triangular matrix) 63

三角 (Triangulation) 網形與三邊 (Trilateration)網形 48, 53

么模方陣(Unimodular matrix) 63

叉積(Cross product)或向量積 61

反正切(Arctangent)函數 14, 27, 53

方向餘弦(Direction cosine) 59

反曲點(Inflection point)或回折點 62

方位角(Azimuth) 10, 14, 28

方差(Variance)或變異數或變方 8, 16, 21, 28, 36, 46

方差分量(Variance-component) 37

尺度(Scale)因子 13, 27, 42, 48

分配律(Distributive law) 3, 47, 50, 62

尺量(Scalar)或純量 3, 6

不偏的(Unbiased) 36, 70

分塊對角(Block diagonal)方陣 34

內可靠度(Internal reliability) 23

內角(Interior angle) 28

內約制(Inner constraint) 48, 52

內積(Inner product)或點積或純量積 5, 38, 54, 59, 61

水準(Leveling)網形 28, 32, 54

卡方(Chi-square) 16

正交(Orthogonal)方陣 64

正交化(Orthogonalization) 63

正交投影(Orthogonal projection) 39

正交補餘(Complement) 40

正弦(Sine)函數 31

正定的(Positive definite) 6, 33, 40

正規化(Normalization) 9, 26

外可靠度(External reliability) 25

外積(Outer product) 5, 62

平方根(Square root) 9, 26, 60

平行六面體(Parallelepiped) 61

平行四邊形(Parallelogram) 4, 60

平移(Translation)參數 27, 48

左乘(Premultiplication)或右乘 (Postmultiplication) 3	交換律(Commutative law) 3, 40
半長軸(Semimajor axis)與半短軸 (Semiminor axis) 67	多餘(Redundancy)數 14, 20
可逆(Invertible)矩陣 4, 49	先驗(Prior)或事前方差尺度 27
代數(Algebra) 2, 60	多變量(Multivariate)或多元的 13, 37
目標函數(Objective function) 33, 63	均方根(Root-mean-square) 8
加權平均值(Weighted mean) 8, 18	改正量(Correction)或增量 16, 33, 41, 45
	形式(Formal)誤差 26
	估計式(Estimator) 14, 37
六至十劃	角條件(Angle condition) 29
因子分解(Factorization) 36, 65	系統誤差(Systematic error)或常差 25
地心地固的(Earth-centered, -fixed) 41	更新(Update) 46
自由度(Degree of freedom) 14, 26, 36, 66	坐標(Coordinate) 11, 14, 41, 53, 58
行(Column)或縱行及列(Row)或橫列 2	投影算子(Projection operator) 40
列秩(Row rank) 48, 52	伴隨(Adjoint)矩陣 4, 19
行列式(Determinant) 4, 18, 63	門檻(Threshold)或閾值 23, 26
行空間(Column space) 40	非中心參數(Noncentrality parameter) 22
共軛複數(Complex conjugate) 60	非奇異的(Nonsingular) 4, 49
全球導航衛星系統 GNSS (Global Navigation Satellite Systems) 41	協方差(Covariance)或共變異數或協變 方 9, 10, 13, 33, 66
灰階(Gray level) 33	法方程組(System of normal equations) 13, 18
向量(Vector)或矢量 2	法(Normal)向量 61

固有向量(Eigenvector) 5, 64	閉合差(Misclosure) 16, 30, 42
固有值(Eigenvalue)或特徵值 6, 43, 64	矩陣(Matrix) 2
近似(Approximate)坐標 15, 41	時間序列(Time series) 45
度量(Metric) 38	倒數(Reciprocal)或互反 65
函數模式(Functional model) 28	秩虧(Rank deficiency) 45, 48, 51, 53
前方交會(Intersection) 14	
約化觀測量(Reduced observation) 13, 30, 33, 42, 45	十一至十五劃
約制(Constraint) 29, 33, 45, 50, 63	第一型(Type I)誤差或第二型(Type II)誤差 22
迭代數據搜評 IDS (Iterated Data Snooping) 26	頂角(Vertex angle) 59
弧度(Radian) 10	移項(Transpose) 13, 30, 46
相關(Correlation)係數 9	偏微分(Partial differentiation) 13, 28, 34, 64
信賴區域(Confidence region) 66	畢氏定理(Pythagorean theorem) 40, 58
係數(Coefficient) 30, 68	逐次(Sequential)平差 45
品質管制(Quality control) 48	混合模式(Mixed model) 33
面積(Area) 4, 59	條件機率(Conditional probability) 7
後驗的(Posterior) 21	條件觀測(Conditional observation)平差 28
乘子(Multiplier)或關聯向量 28, 34, 48	陪伴(Accompanying)矩陣 37
差分(Differencing) 41, 53, 62	設計(Design)或量測梯度矩陣 13, 15, 33, 48
逆陣(Inverse matrix)或逆方陣或反矩陣 4, 19, 63, 68	粗差偵測(Blunder detection) 25

假設檢定(Hypothesis testing) 21, 25, 66

間接觀測(Indirect observation)平差 13

偶然誤差(Accidental error) 16

基準(Datum) 54

常態分布(Normal distribution) 17, 21, 61

參數估計(Parameter estimation) 20, 37

旋轉(Rotation)參數 27, 48, 53, 67

斜邊(Hypotenuse) 58

最小二乘 LS (Least-Squares)原理 1, 13, 17, 20, 28, 45

最小約制(Minimal constraint)解答 48, 51

最佳線性不偏估計式 (Best linear unbiased estimator) 36

散布(Scatter)矩陣 6

極式(Polar form) 60

極值(Extreme value) 64

結合律(Associative law) 3, 47, 50, 62

幾何(Geometry) 4, 29

單位(Identity)方陣 3, 6

超平行體(Parallelotope) 61

超平面(Hyperplane) 59

超定的(Overdetermined) 45

鈍角(Obtuse angle) 5

統計學(Statistics) 1

殘差(Residual) 13, 20, 28, 35, 48

期望(expectation)值 7, 29, 36, 61

測量平差(Surveying adjustment) 1

虛無(Null)假設 22

絕對值(Absolute value)或長度或強度 5

距離(Range) 14, 41

順鐘向(Clockwise) 10

跡(Trace) 5, 36, 65

載波相位(Carrier phase) 41

零核空間(Null space) 49

零矩陣(Null matrix) 13, 28, 49

算子(Operator)或算符 1, 40

廣義逆元(Generalized inverse) 40, 52

誤差傳播(Error propagation)定律 7, 10, 13, 34, 50

誤差橢圓(Error ellipse)或標準橢圓 11, 48, 66

對立(Alternative)或備擇假設 21

對角(Diagonal)方陣 2

對稱(Symmetry) 3, 40	機 率 密 度 函 數 (Probability density function) 17, 26, 61
對數(Logarithm)函數 26	冪等(Idempotent)方陣 20, 36, 43, 50
算術平均數(Arithmetic mean) 12, 18	隨機模式(Stochastic model) 28, 33, 42
網形平差(Network adjustment) 28, 53	隨 機 樣 本 一 致 RANSAC (Random Sample Consensus) 25
複數(Complex number) 33, 60	輻角(Argument) 60
精密度(Precision)或標準差及精確度 (Accuracy)或均方根值 8, 9	導數(Derivative)或微商 17, 34, 62
範數(Norm) 44	整數(Integer-valued)參數 42
演算法(Algorithm) 62	擬逆陣(Pseudoinverse) 52, 65
餘因子(Cofactor) 4	擬距(Pseudorange) 41
餘弦(Cosine)函數 39, 59	擬觀測(Pseudo-observation) 45
銳角(Acute angle) 5	聯合機率(Joint probability) 8, 17
橫坐標(Abscissa) 10, 14, 53	錯誤(Gross error)或粗差 21, 24
衛星導航(Satellite navigation) 43	縱坐標(Ordinate) 10, 14, 53
增益(Gain)矩陣 46	檢定力(Power of test) 23
標準差(Standard deviation)或中誤差 9, 12, 18, 61	檢定統計量(Test statistic) 16, 26
十六劃以上	轉置(Transposition) 2, 13
積分(Integration) 14, 29, 37	雙線性形(Bilinear form) 6, 38
線性化(Linearization) 15, 41, 62	邊條件(Side condition) 31
線性組合(Linear combination) 28, 33	邊際(Marginal)門檻 23
	離勢(Dispersion)矩陣 9, 33

離群值(Outlier) 25

權(Weight) 9, 16, 21, 33, 45, 48

變率(Rate of change)或梯度 15, 33

變換(Transformation)或轉換 11, 27, 51,

63, 66

顯著水準(Significance level) 22, 66

體積(Volume)守恒 63